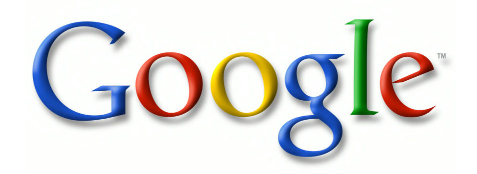
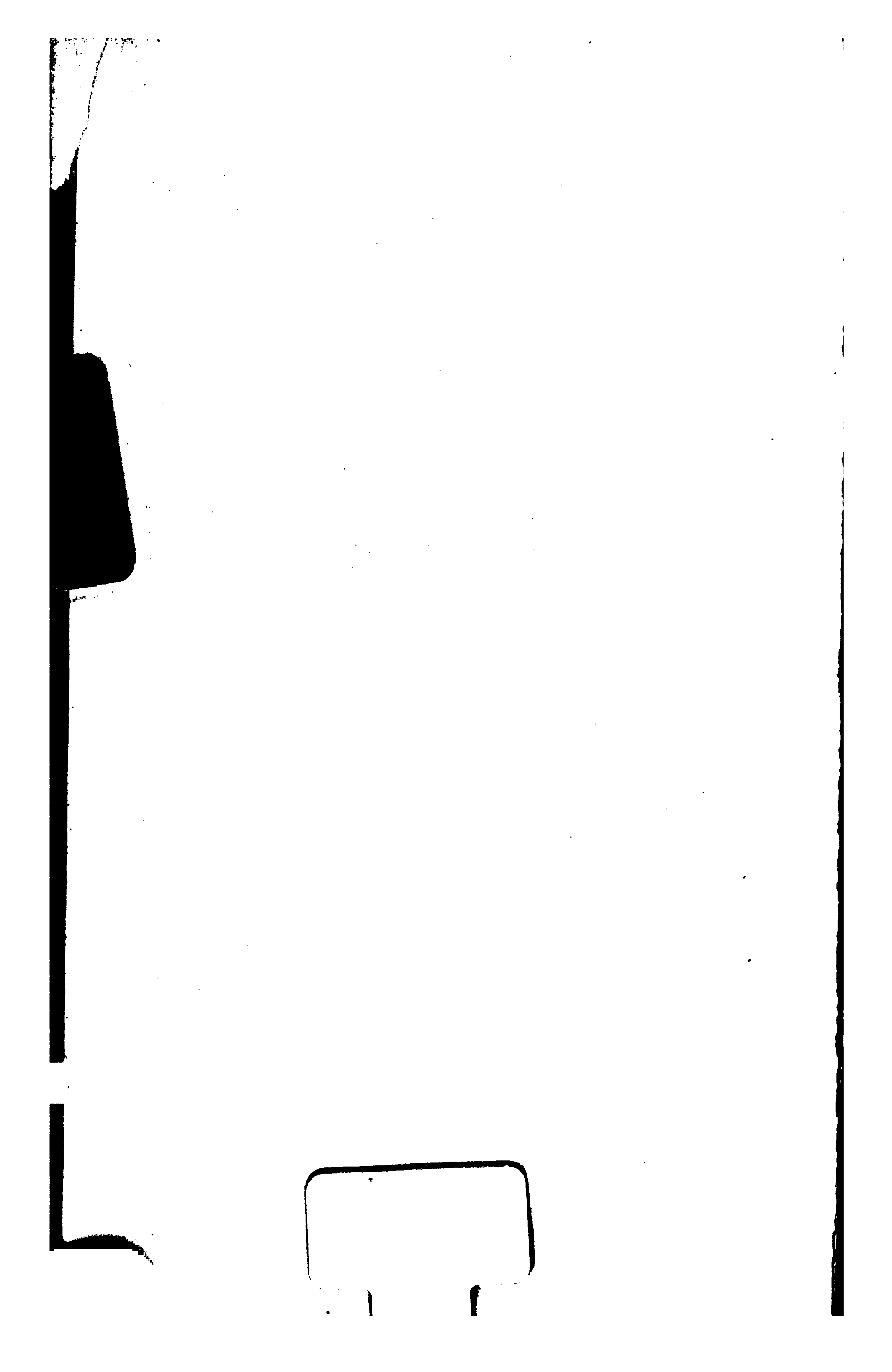
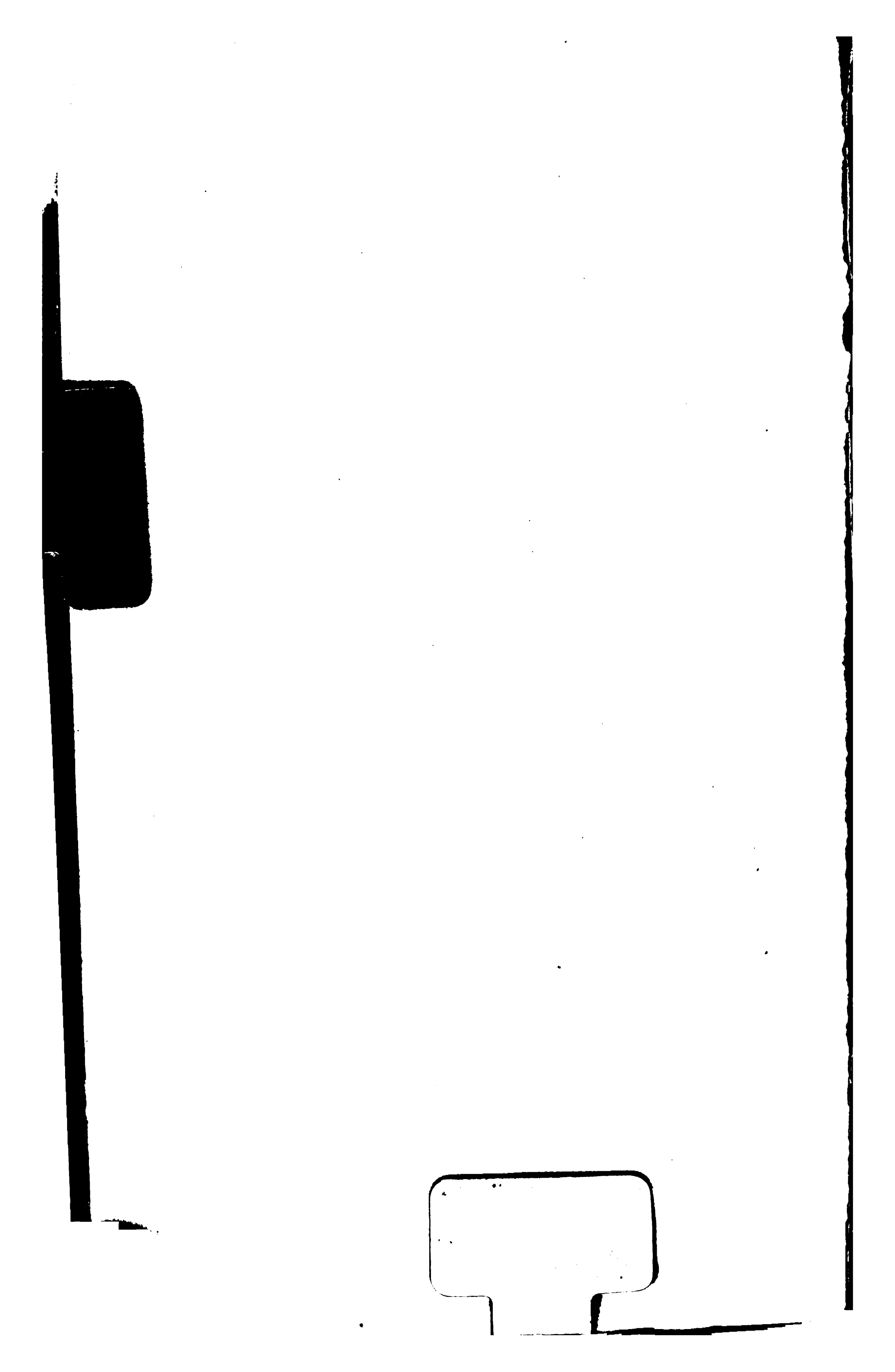
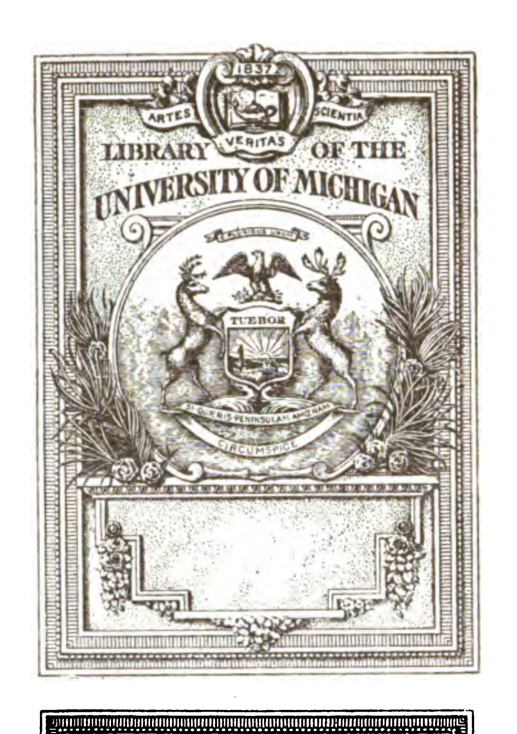







1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

3.4

Alexander Ziwet

DIE

# STEINER'SCHEN SCHLIESSUNGSPROBLEME

NACH

## DARSTELLEND GEOMETRISCHER METHODE

VON

DR. MARTIN DISTELI,
ASSISTENT AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

MIT 10 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
5-7-1923

# Vorwort.

Seit Steiner's Veröffentlichung „Geometrische Lehrsätze" im 32. Bande des Crelle'schen Journals (p. 182—184, 1845 und „Werke": p. 371—373) hat das Schliessungsproblem bei ebenen Curven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Eins mehrfache Behandlung erfahren; zunächst in analytischer Form durch Clebsch[1]); dann in geometrischer durch die Herren Küpper[2]) und Schoute[3]), durch welche mit demselben Satze über ebene Curven dritter Ordnung als Ausgangspunkt die Steiner'schen Sätze im Wesentlichen nach übereinstimmender Methode in der Ebene bewiesen worden sind. Schon im Mai 1869 ist durch Herrn Emil Weyr[4]) dasselbe Problem für rationale Curven mit geometrischen Mitteln behandelt, dann in einem Zusatze zu dieser Arbeit von mehr analytischer Richtung auf die allgemeinen Curven dritter Ordnung erweitert worden, wohl zum ersten Male mit Hinweisung auf seine räumliche Bedeutung für die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiten Grades; ein Umstand, der von Herrn Schur[5]) bei anderer Gelegenheit berührt worden, und in neuester Zeit durch Herrn Eberhard[6]) mit Interpretation und Erweiterung der Steiner'schen Theoreme unter theilweiser Zugrundelegung der Küpper'schen Arbeit für die

---

[1]) Clebsch: Crelle's Journal Bd. 63. p. 94 ff. (1864.) [2]) Küpper: Abh. der k. böhmischen Gesellsch. der Wissensch. (VI. Folge VI. Bd.) (1873) und Math. Annalen Bd. 24. p. 1—41 (1883). [3]) Schoute: Crelle's Journal Bd. 95. p. 105 ff. und p. 320 ff. (1883). [4]) E. Weyr: Crelle's Journal Bd. 71. p. 16, 18. (1870) und ebenda Bd. 73. [5]) Schur: Math. Annalen Bd. 20 p. 262 (1882). [6]) Eberhard: Zeitschrift für Math. und Physik 32. Jahrgang Heft 2—3 (1887).

Raumcurven vierter Ordnung und beider Species aufgenommen worden ist.

Als tetraedal-symmetrische Curve und Grundcurve eines Flächenbüschels ist die Raumcurve vierter Ordnung erster Art Träger regelmässiger Gruppen von Punkten, Geraden und Ebenen, die Herrn Ameseder[7]) zu einer Untersuchung Veranlassung gaben, welche in naher Beziehung zu den Steiner-schen Fragen steht. Nach der Natur ihrer Entstehung sind jene Punktegruppen Elemente bestimmter Punktinvolutionen der Raumcurve und ihre Bedeutung hängt an der Existenz von Involutionen der Flächen im Büschel, deren Regelschaar-involutionen aus ihrer projectivischen Verbindung die Steiner-schen Secantenpolygone hervorgehen lassen. In dieser Form ist das Problem insbesondere vom Standpunkt der darstellenden Geometrie aus zu fassen, welchen die vorliegende Arbeit einnimmt.

Die darstellend geometrische Behandlung stützt sich auf den Umstand, die Raumcurve vierter Ordnung erster Art als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiten Grades untersuchen zu können, und zwar mit allen ihren Special- und Degenerationsformen. Die einfachen Hyperboloide ihres Büschels, die bei keiner Durchdringung fehlen, übernehmen dabei die Rolle von Trägern reeller Steiner'scher Secantensysteme, und führen schon bei der Construction der Curve aus achtpunktigen Gruppen auf den Zusammenhang von je vier Flächen mit den Steiner'schen Vierseiten und damit zur Frage nach den Steiner'schen Polygonen überhaupt.

Man wird sagen können, dass mit der grundlegenden Arbeit von Clebsch das Problem in seiner allgemeinsten Form erledigt war, dass dagegen die geometrische Methode der Behandlung nach dem Princip der Centralprojection den Vortheil gewährt, alle Formen der Curven dritter Ordnung ohne Rücksicht auf das Geschlecht nach einheitlichen Gesichtspunkten

---

[7]) Ameseder: Bd. LXXXVII. p. 1179. Aprilheft der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. (1883) und in neuester Zeit: Bd. XCIII der Sitz.-berichte der k. Akad. der Wissensch. Januarheft (1886).

zu umfassen, und dass sie durch Zuziehung des Raumes zur Erledigung der Frage die einfachsten constructiven Mittel zur wirklichen Darstellung der Ergebnisse liefert, weil sie erlaubt, die Punktinvolutionen auf der Curve vom Geschlecht Eins durch Flächeninvolutionen im Büschel, also in einem rationalen Träger zu untersuchen, und weil eine Erweiterung in der Dimension des Untersuchungsgebietes nur von einer Vereinfachung der Constructionen am Gebilde selbst begleitet sein wird. Die Ausdehnung des Problems auf Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und der unmittelbare Zusammenhang mit der zweiten Steiner'schen Mittheilung (dasselbe Journal Bd. 32, p. 300—304 und „Werke" Bd. II, p. 377—380) treten dabei besonders deutlich hervor.

Die vorliegende Untersuchung geschah in engem Anschluss an die constructive Behandlung der Durchdringungscurven zweier Kegel zweiten Grades, welche Herr Professor Fiedler im zweiten Bande seines Werkes „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage" (pg. 104—188 III. Aufl. 1885) gegeben hat und welche 1885 schon die Grundlage einer Diplomarbeit am eidg. Polytechnikum für den Verfasser vorliegender Schrift gebildet hat. An diese knüpfte sich naturgemäss die Frage nach dem Steiner'schen Vierschluss auf demselben Wege räumlicher Anschauung, mit der erfreulichen Bestätigung, die unabhängig gemachte Untersuchung methodisch in Uebereinstimmung zu sehen mit der vorausgegangenen von Herrn Professor Fiedler über denselben Gegenstand, deren Ergebnisse im dritten Bande des genannten Werkes (pag. 329—354) niedergelegt sind, und deren Priorität hier ausdrücklich hervorgehoben werden soll.

Dazu sei an dieser Stelle bemerkt, dass meiner in vorliegender Arbeit unter Abschnitt I gegebenen Entwicklung an Hand der dazu gehörenden Figuren der Taf. I und IV schon vor ihrer jetzigen Veröffentlichung die Ehre der Aufnahme in dem genannten Werke (pag. 354—363) zu Theil geworden ist. Die an den eben bemerkten Stellen dieses Werkes — auf das

in der Folge unter (D. G.) hingewiesen werden soll — gegebenen Entwicklungen bilden den Anfang einer darstellend geometrischen Untersuchung der Steiner'schen Schliessungssätze überhaupt und damit ein altes Programm (Vorrede Bd. II. p. XI f.) meines hochgeehrten Lehrers, für dessen fördernde Anregung mit manchem werthvollen Wink auf Weiterführung und Abschluss der vorliegenden Fragen ich gerne an dieser Stelle dem aufrichtigsten Danke Ausdruck gebe.

Die Methode in der Behandlung des Problems bedingte die Beigabe von zehn lithographirten Tafeln, welche in dem beschränkten Rahmen ihrer Ausführung überall durch enge Anlehnung und Verbindung mit der Entwicklung dem doppelten Zwecke der Anregung und Weiterführung in derselben, sowie der Unterstützung räumlicher Anschauung zu dienen versuchen. Mögen sie das Mögliche dazu beitragen, die Unvollkommenheiten und Mängel des Textes auszugleichen.

Zürich, im Mai 1888.

**Der Verfasser.**

# Inhaltsverzeichniss.

## A. Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$-Schlusses für $n = 2^k$.

Abschnitt I—III. Art. 1—14. p. 1—36. Taf. I—IV.

## V. Die Sechsschlussinvolution.



## VI. Die Involutionsreihen der Zahlen $2^k$ und $3^{k_1}$ und ihre Transformation.



## VII. Modification für die Specialformen der Durchdringung.

### VIII. Anwendung der Sechsschlussinvolution. — Osculationssysteme.



---

## C. Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$-Schlusses für $n = 5^{k_2}$, $n = 2^k \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{k_2}$ und die allgemeine Zahl $n$.

Abschnitt IX—XII. Art. 31—50. p. 79—125. Taf. VII—X.



### IX. Ableitung der Reihe für $n = 5^{k_2}$ und ihre Transformation in den bekannten Involutionsreihen.



### X. Ableitung und Transformation der Involutionsreihen für allgemeine Primzahlen.

## XI. Die merkwürdigen Punktsysteme von Clebsch. — Geschlossene Tangentenpolygone.



## XII. Specialformen und allgemeine Lage des Centrums.

# Erklärung der Tafeln.

Tafel I. Durchdringung mit vier reellen Kegeln als circulare, zweitheilige Curve dritter Ordnung im Bild. Darstellung des Involutionselementes des Vierschlusses und der Doppelflächen $V^{(4)}$.

„ II. Die circulare, zweitheilige Curve dritter Ordnung als Bild der Grundcurve eines Büschels mit vier reellen und eines solchen mit vier nicht reellen Kegelflächen. Darstellung eines Involutionselementes des Achtschlusses und der Doppelflächen $V^{(8)}$.

„ III. Fig. 1. Durchdringung mit zwei reellen Kegeln: circulares eintheiliges Curvenbild. Darstellung des Involutionselementes des Vierschlusses und der Flächen $V^{(4)}$. — Fig. 2. Durchdringung mit Doppelpunkt aus der einfachen Berührung der Kegel. Involutionselement des Vierschlusses und Construction der Geraden durch die drei Wendepunkte des rationalen Curvenbildes.

„ IV. Fig. 1. Die Raumcurve dritter Ordnung vom Kreisbilde $K'$ mit Bisecante $l$. Quadratische Involution des Vierschlusses. — Fig. 2. Durchdringung als Kegelschnittpaar. Darstellung der Elemente der quadratischen und cubischen Möbius'schen Involutionen auf dem Kegelschnitt $K'$ und auf der Geraden $p'$ des Curvenbildes.

„ V. Durchdringung mit vier reellen Kegeln. Construction der Doppelflächen $V^{(6)}$ und Darstellung der Wendepunkte, des Systems der Linien $h$ durch diese und der harmonischen Polaren $i$ des Curvenbildes für einen Scheitel der Curve $R_4$ als Centrum. Büschel der Polarkegelschnitte der Punkte der Geraden $g'$ im Bild.

„ VI. Dieselbe Durchdringung bei allgemeiner Lage des Centrums auf der Curve. Darstellung des Involutionselementes des Sechs- und Zwölfschlusses mittelst des Umrisskegels $U_8$. (Die Construction der zugehörigen Flächen $V^{(12)}$ ist mit der vorigen Tafel verbunden.)

„ VII. Durchdringung mit vier reellen Kegeln. Darstellung der Flächen $V^{(10)}$ und des Involutionselementes des Zehnschlusses auf dem Curvenbild mittelst des Umrisskegels $U_5$.

„ VIII. Durchdringung mit vier reellen Kegeln. Darstellung des Involutionselementes des Fünfzehnschlusses von der Gruppe der drei reellen Wendepunkte des Curvenbildes aus: Clebsch'sches Punktsystem erster Art: geschlossene Tangentenvierseite.

„ IX. Darstellung eines Clebsch'schen Punktsystems zweiter Art ohne Wendepunkte durch Erweiterung der Tangentendreiseite in der Involution des Zehnschlusses: Construction eines Tangentenzwölfseits.

„ X. Darstellung des Erzeugnisses aus den trirectangulären Regelschaarinvolutionen eines gleichseitigen Hyperboloids für einen seiner Punkte als Centrum: also des Curvenbildes vierter Ordnung aus der projectivischen Verbindung cubischer Strahleninvolutionen und der Tangenteninvolutionen dritter Ordnung auf einem Kegelschnitt des Umrisssystems.

## A. Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$-Schlusses für $n = 2^k$.

Zwei Flächen zweiten Grades durchdringen sich in einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art $R_4$, der Grundcurve des durch die beiden gegebenen bestimmten Büschels von Flächen zweiten Grades, welche von den Ecken des allen gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole und Polaren, dem Tetraeder der Kegelspitzen, doppelt projicirt wird, so dass sie also gleichzeitig als Durchdringungscurve von zwei Kegeln zweiten Grades erscheint — den Fall ausgeschlossen, wo das Tetraeder imaginär wird: eine Durchdringung, die sich in der folgenden Untersuchung als zurückführbar auf eine solche mit vier reellen Kegeln erweist. In diesem Falle bleibt ein Paar windschiefer Gegenkanten des Tetraeders reell, als Träger quadratischer Punkt- und Ebeneninvolutionen, deren nicht reelle Doppelelemente die Ecken und Seitenflächen des Tetraeders sind; die eine oder beide Involutionen können aber auch hyperbolisch sein: ein Büschel mit zwei oder vier reellen Kegeln, und mit der entsprechenden Eigenthümlichkeit für die Raumcurve, dass sie im Falle von zwei reellen und zwei nicht reellen Kegelflächen eintheilig, im Falle von vier reellen zweitheilig ist. Der Uebergang von dieser Form zu jener geschieht durch den Fall der Berührung der Kegelflächen, oder der Curve mit Doppelpunkt, wobei zwei der vier reellen Kegel sich in den uneigentlich doppelt projicirenden Kegel aus dem Doppelpunkte zusammengezogen haben. Mit diesem ist endlich noch ein dritter Kegel vereinigt zu denken, wenn die gemeinschaftliche Tangentialebene aller Flächen im Doppelpunkte ihn berührt, oder im Falle der Raumcurve vierter Ord-

nung mit Spitze. Die beiden Formen der Curve mit Doppelpunkt und Spitze sind rational und das Hinzutreten eines zweiten Doppelpunktes bewirkt das Zerfallen, entweder in eine Raumcurve dritter Ordnung $R_3$ und eine reell oder nicht reell schneidende Bisekante, also wieder mit zwei reellen oder nicht reellen Kegelflächen, oder in zwei Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen reellen oder imaginären Schnittpunkten. Das Zerfallen der Raumcurve $R_3$ oder der beiden Kegelschnitte giebt endlich die Formen der Curve mit drei Doppelpunkten aus Kegelschnitt und Geradenpaar, und mit vier solchen oder des windschiefen Vierseits (D. G. Bd. II p. 104 ff.).

## I. Die Vierschluss-Involution.

1. Wir beginnen die Betrachtung mit dem Falle der zweitheiligen Raumcurve $R_4$, oder des ganz reellen Tetraeders der vier Kegelmittelpunkte $M_1 .. M_4$ und der Gegenebenen $P_1 .. P_4$. Sind in Taf. I $M_1 L_1$ und $M_2 L_2$ die darstellend geometrischen Daten der Durchdringung zweier Kegelflächen zweiten Grades für einen ihnen gemeinsamen Punkt, also für einen Punkt der Raumcurve als Centrum, so haben wir als Bild der Durchdringung eine circulare zweitheilige Curve dritter Ordnung $C_3$ zu erwarten, wenn die Polarinvolutionen am Durchstosspunkt $S_{12}$ von $M_1 M_2$ in Bezug auf die Spuren $L_1$ und $L_2$ nicht sich trennende reelle Doppelelemente besitzen (D. G. Bd. II p. 156). Wählt man den Punkt $S_{12}$ als Schnittpunkt zweier zu einander normaler Durchmesser der Spurkreise, so sind diese für beide Involutionen das gemeinsame Paar, also die Spuren $s^{P_3}$ und $s^{P_4}$ der beiden durch die Kante $M_1 M_2$ gehenden Tetraederebenen; ebenso sind die Polaren von $S_{12}$ für die Kreise $L_1$ und $L_2$ die Spuren $s^{P_1}$ und $s^{P_2}$ resp. der beiden andern Tetraederebenen an der Kante $M_3 M_4$, und die Schnittpunkte dieser vier Spuren also die Durchstosspunkte $S_{ik}$ der sechs Tetraederkanten, mit $S_{13}$ und $S_{24}$ nach der Disposition als unendlich fern.

Diese metrischen Specialisirungen, die an der Annahme kreisförmiger Spuren der Kegel hängen im Sinne der Einfachheit und Genauigkeit der Construction, sind durchaus nicht be-

schränkend für die Allgemeinheit der Untersuchung; durch eine collineare Transformation verschwinden die metrischen Merkmale und werden zu projectivischen des allgemeinen Falles.

Nach der Eigenschaft einer Tetraederebene als gemeinschaftlicher Polarebene der Gegenecke für die drei Kegelflächen, deren Spitzen sie enthält, sind drei Punkte $S_{ik}$ mit demselben ersten Index die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks von Punkten einer Spur $L_i$, mit den Tangentenpaaren an die drei übrigen Spurkreise als Seiten. Das Tangentenpaar aus $S_{12}$ an $L_2$ bestimmt auf $L_1$ ein vollständiges Viereck, dessen zwei weitere Seitenpaare sich in $S_{13}$ und $S_{14}$ begegnen und die noch fehlenden Spuren $L_3$ und $L_4$ als Tangentenpaare an diese eindeutig bestimmen. Die Construction der Durchdringung geschieht im Folgenden mit Benutzung der vier centrischen Involutionen, die für jede Ecke und Gegenebene des Tetraeders in Bezug auf die Raumcurve statthaben, also durch Punkte und Tangenten in Gruppen zu acht (D. G. Bd. II p. 173—179).

Die Punkte $P$ jeder solchen Gruppe liegen vier Mal paarweise zu vieren in Strahlen durch die Tetraederecken und sechs Mal zu vieren in Paaren von Ebenen durch die Tetraederkanten, welche mit den Tetraederebenen je eine harmonische Gruppe bilden. Daraus folgt, dass die in einem solchen Ebenenpaare gelegenen Paare von Diagonalen des Vierecks der $P$ ein windschiefes Vierseit von Doppelsekanten der Raumcurve bilden, dessen Ecken auf zwei Gegenkanten des Tetraeders liegen und mit den Punkten $M_i$ desselben auf diesen harmonische Gruppen bilden. Sie formiren demnach jedesmal auch ein windschiefes Vierseit für eine bestimmte Fläche des Büschels. Aus jeder Gruppe zu acht entstehen drei solche Vierseite und drei Flächen; ihren Zusammenhang mit einer vierten als geschlossener Gruppe werden wir bald hervortreten sehen.

Für ein gegebenes Paar von Tetraedergegenkanten ordnen die Vierseite auf diesen die Paare der Punktinvolutionen der Kegelspitzen in projectivische Zuordnung, nämlich in Punktepaare, welche durch die zugehörige Fläche des Büschels ausgeschnitten werden, und sie bringen die Paare der Ebenen-

involutionen der Tetraederflächen um dieselben Kanten in projectivische Zuordnung, als die Paare von Tangentialebenen durch diese an je dieselbe Fläche des Büschels; ihre Gesammtheit erfüllt also eine Regelfläche, die nach ihrer dualen Erzeugungsweise als solche vierter Ordnung und Classe $R^{(4)}$ mit dem betrachteten Paare von Tetraederkanten als Doppelgeraden erkannt wird. Sie hat mit jeder Fläche des Büschels ausser der Raumcurve $R_4$ ein windschiefes Vierseit gemein; jede der Kegelflächen berührt sie nach zwei in einer Tetraederfläche gelegenen Erzeugenden; die Ebeneninvolution um die Tetraederkante erscheint dabei als ihre doppelt umschriebene Developpable. Auf diese Weise entstehen drei Flächen $R^{(4)}$; wir wollen ihre Erzeugenden, welche zugleich Doppelsekanten der Raumcurve und des Tetraeder sind, Linien $g$ nennen. Auf jeder Fläche des Büschels liegen dann drei Vierseite von Linien $g$, welche sich in vierundzwanzig Punkten begegnen, die zu acht je einer Durchdringungscurve zweier Flächen $R^{(4)}$ angehören[1]).

Die sechs Ebeneninvolutionen um die Kanten des Tetraeders geben aber, wenn ihre Scheitelkanten sich schneiden, einem Kegel vierter Ordnung mit drei Tetraederkanten als doppelten Inflexionserzeugenden die Entstehung. Die Durchdringungscurve zwölfter Ordnung $R_{12}$ zweier Flächen $R^{(4)}$ besitzt also in den Tetraederecken vierfache Punkte und wird aus diesen durch die genannten Kegel vierter Ordnung doppelt projicirt. Da zwei solche Kegel längs einer Kante die Inflexionstangentialebenen gemeinsam haben, so stellen die Tetraederkanten ihre Gesammtdurchdringung dar, und zwei Curven $R_{12}$ können sich demnach nur in den Tetraederecken schneiden; dagegen hat jeder doppeltprojicirende Kegel der Raumcurve $R_4$ mit dem Kegel vierter Ordnung an derselben Spitze acht Erzeugende gemein, welche aus der $R_4$ die zwei achtpunktigen Gruppen herausschneiden, welche die Curven $R_{12}$ und $R_4$ gemeinsam haben und welche mit den acht veränderlichen Punkten die vierundzwanzig Schnittpunkte jeder Fläche des Büschels mit der $R_{12}$ ausmachen.

---

1) Man vergl.: Harnack, Math. Annalen Bd. XII. p. 72.

Die drei Curven $R_{12}$ schneiden somit aus $R_4$ sechs Gruppen von acht Punkten, in welchen sich die Seiten zweier verschiedener Vierseite derselben Fläche des Büschels begegnen, und auf deren Bedeutung wir im Folgenden geführt werden.

2. Wir kehren zu unserer Disposition Taf. I zurück. Die Bilder $M_i'$ der vier Kegelspitzen sind Punkte einer Gruppe von acht auf der $R_4$, zu welcher auch das Centrum gehört und entspringen mit den noch fehlenden vier Punkten aus dem Paare von Hülfsebenen der Spuren $h_{12}$ in der Involution um $S_{12}$, von denen die eine projicirend. Die zwei vollständigen Vierecke, die durch die Schnittpunkte mit den Kegelspuren $L_1$ und $L_2$ bestimmt werden, liefern als Ecken je zwei Paare schon bekannter Durchstosspunkte $S_{ik}$. Durch $M_1'$ und $M_2'$ gehen je drei dieser Linien, die Spuren $h_{1k}$ und $h_{2k}$ ($k = 1, 2, 3$) der projicirenden Ebenen für die drei Tetraederkanten, die resp. in $M_1$ und $M_2$ zusammentreten. Die analoge Vervollständigung des Spurenpaares $h_{13}$ am Punkte $S_{13}$ auf $L_3$ bestimmt die projicirenden Ebenen der Tetraederkanten an $M_3$ und $M_4$; wir sind somit in den Stand gesetzt, die Bilder der sechs Tetraederkanten direct und die acht Punkte der das Centrum enthaltenden Gruppe gleichmässig aus sechs Ebenenpaaren an diesen Kanten zu bestimmen.

Wir gelangen so zu den noch fehlenden vier Punkten $M$, von denen der eine im Bilde als Durchstosspunkt $S_t^c$ der Tangente im Centrum als gemeinsamer Schnittpunkt der vier Tangenten in den Punkten $M_i'$ erscheint. Den Bildern der Kegelspitzen, sowie den vier Bildpunkten $M'$ — in der Figur sind die Projectionsstriche der Deutlichkeit halber weggelassen — entsprechen je vier Punkte auf der Raumcurve, die durch Linien $g$ von einander getrennt sind.

Die Tangenten in den Punkten einer Gruppe zu acht haben aber die Eigenschaft, dass jede derselben von vier andern geschnitten wird, wo sie den Ebenen des Tetraeders begegnet, sie gehören somit zu vier je einer Regelschaar eines Hyperboloids im Büschel an. Die acht Punkte einer Gruppe theilen sich demnach naturgemäss in zwei Halbgruppen oder Quadrupel, wie diejenigen der Punkte $M_i$ und $M$. Die Durch-

stosspunkte der letzteren sind somit vier Punkte des Spurkreises $S^c$ für das durch die Centrumstangente bestimmte Hyperboloid $H^c$, und die vier Tangentenbilder selbst begegnen sich demnach in einem zweiten reellen Schnittpunkte $F$ desselben mit der Curve. Andererseits gestatten die vier Punkte $M$ sechs Verbindungslinien, als Linien $g$ im Raume paarweise auf derselben Fläche gelegen; somit sind auch die drei Diagonalpunkte des Vierecks der $M$ Punkte der Curve.

Die vier Tangenten der $C_3$ aus dem Punkte $F$ können drei Mal als Paare je einer quadratischen Strahleninvolution aufgefasst werden; die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte als Doppelelemente je einer solchen an einem der drei andern Punkte $F$. Bringt man irgend eine dieser letztern mit der entsprechenden der drei ersten in projectivische Verbindung, indem man in beiden als drittes Paar dasjenige sich entsprechen lässt, das aus der Verbindungslinie der beiden Scheitel hervorgeht, so tritt als Erzeugniss eine Curve dritter Ordnung auf, die mit der vorliegenden $C_3$ nebst den Scheiteln $F$ die vier Punkte $M$ und ihre Tangenten gemein hat, also nothwendig mit ihr identisch ist. Daraus folgt, d a s s  d i e  T a n g e n t e n  i n  d e n  v i e r  P u n k t e n $F$ s i c h  i n  e i n e m  P u n k t e  $T$ d e r  C u r v e  b e g e g n e n; dass diese somit ebenfalls den Punkten eines Quadrupels im Raume entsprechen und aus ihrer paarweisen Verbindung drei weitere Punkte $T$ einer Gruppe analogen Zusammenhanges ergeben, weil sie aus den $F$ und diese aus den $M$ ebenso abgeleitet sind, wie die Punkte $M$ aus den $M_i'$.

Die vier Bildpunkte $F$ eines Quadrupels zeigen alle dasselbe Verhalten unter sich; je nach der Combination mit einem der drei andern entsteht an jedem derselben eine von drei quadratischen Involutionen, die durch Scheitelstrahl und Tangente ergänzt, die Curve als Erzeugniss ihrer projectivischen Verbindung ergeben:

J e  z w e i  P u n k t e $F$ s i n d  s o m i t  F u n d a m e n t a l p u n k t e[1]) f ü r  e i n e  u n e n d l i c h e  F o l g e  S t e i n e r'scher  V i e r s e i t e  u n d  e r ö f f n e n  d a m i t  d i e  F r a g e  n a c h  s o l c h e n  P o l y g o n e n  ü b e r h a u p t.

---

1) Wir schreiben in der Folge abkürzend F.-Punkt.

3. Durch die vier Punkte $F$ gehen vier Kreise des Büschels, die Spuren der vier Hyperboloide, deren zugeordnete Regelschaaren jene Strahleninvolutionen zu Bildern haben, so dass je ein Paar von Erzeugenden der einen Fläche sich mit einem Paare jeder der drei andern zu einem geschlossenen windschiefen Vierseit, einem Steiner'schen Sekantenpolygon zusammensetzt, dessen Ecken auf der Raumcurve liegen. Durch Combination einer der vier Flächen mit den drei andern entstehen auf diesen drei Involutionen ihrer Regelschaaren, die im Bilde bestimmt sind durch eine Zusammenfassung der vier Tangenten an die $C_3$ in zwei Paare, und die jedesmal zu drei Polen $P$ bezüglich des zugehörigen Spurkreises führen, welche für diesen ein Polardreieck bilden, und welche selbst paarweise auf sechs Kreisen des Spurbüschels liegen, die sie als Träger projectivischer Strahlenbüschel hervorbringen. Es hat dabei in Taf. I seinen Grund in der Rechtwinkligkeit der Spuren $s^{P_3}$ und $s^{P_4}$, dass jedesmal einer dieser Pole ins Unendliche fällt.

Die Combination der beiden Involutionen, deren Scheitel auf dem unendlichen Aste der Curve $C_3$ liegen, ergiebt reelle Doppelelemente der zuerst betrachteten Strahleninvolution, die offenbar nach den Berührungspunkten $N$ der Tangenten aus dem Scheitel $F$ der andern gehen. Die Punkte $N$ sind somit wieder Bilder von Punkten eines Quadrupels, und da $F$ ein Diagonalpunkt ihres Vierecks ist, so fallen die beiden fehlenden Diagonalpunkte mit den beiden andern $F$ zusammen. Für die beiden $F$ mit nicht reellen Tangenten sind somit die Involutionen bestimmt durch ihre Doppelelemente, oder durch zwei Vierseite nach den Ecken $M$ und $N$. Als Linien $g$ schneiden die in den Doppelstrahlen der Involution am ersten Punkte $F$ projicirten Verbindungsgeraden der Punktepaare $N$ die Tetraederkanten $M_2 M_3$ und $M_1 M_4$, bestimmen mit diesen zwei Ebenen und damit direct wie in Taf. I die Punkte $N$ mittelst der in ihnen liegenden Kegelerzeugenden.

Wir haben in den betrachteten vier Flächen das Element einer Flächeninvolution vierter Ordnung im Büschel; denn die vier Punkte $F$, deren projicirende Strahlen jene räumlich bestimmen, sind nach ihrer Construction selbst vier Punkte einer

involutorischen Gruppe, und offenbar entsteht die ganze Flächeninvolution, wenn man nacheinander alle Quadrupel der Raumcurve mit dem Centrum $C$ verbindet. Der Punkt $C$ ist aber ein willkürlicher Punkt der Raumcurve; bewegt er sich über die ganze Curve $R_4$, so wird die Flächeninvolution unendlich oft erzeugt: Verbindung irgend eines Punktes der Raumcurve mit allen ihren Quadrupeln und Verbindung eines beliebigen Quadrupels mit allen Punkten der $R_4$ liefert dieselbe Flächeninvolution. Daraus ergeben sich für die Projection oder die vorliegende Curve dritter Ordnung sofort die beiden Sätze von Clebsch:

Die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes $P$ der $C_3$ mit den vier Punkten einer Gruppe von F.-Punkten $F$ begegnen der Curve in Punkten $F'$ einer zweiten Gruppe, so dass man aus einer einzigen Gruppe alle erhält, wenn $P$ die ganze Curve durchläuft. Und:

Verbindet man zwei beliebige Gruppen von Punkten $P$ und $P'$ unter sich, so schneiden sich ihre sechszehn Verbindungsgeraden zu vier in vier Punkten $F$ einer dritten Gruppe von F.-Punkten; ihre Tangentialpunkte $T$ liegen also in einer geraden Linie.

Diese Beziehung ist nichts anderes als der zusammenfassende Ausdruck für eine Reihe von Vierseitconstructionen. Die acht Punkte $P$ und $P'$ bilden für jedes Paar von Punkten $F$ die Ecken zweier Vierseite; die Gegenecken jedes Vierseits sind F.-Punkte und gehören zu beiden Gruppen $P$ und $P'$. Zu jedem Vierseite zweier F.-Punkte gehört ein zweites, dessen Ecken die der ersten zu zwei Vierergruppen $P$ und $P'$ ergänzen; ihre beiden Tangentialpunkte liegen jedesmal mit demjenigen der F.-Punkte in gerader Linie.

Jedes Element der Flächeninvolution besteht nach Construction aus den durch die Diagonalen eines Quadrupels und die Tangenten der Raumcurve in diesen bestimmten vier Flächen, von denen die drei ersten schon zu Anfang der Betrachtung zusammen aufgetreten sind. Für diese haben sich die Diagonalen oder Linien $g$ als Doppelelemente der Invo-

lution ihrer Regelschaaren bei Combination mit der vierten erwiesen, und führten als solche zu den Berührungspunkten der Tangenten dieser Fläche. Aber die Doppelelemente jeder Combination müssen gegenseitig zu den Berührungspunkten der Tangenten ihrer Flächen führen, da sie die degenerirten unter den Vierschlusspolygonen darstellen, d. h. die Doppelelemente jeder Involution sind Linien $g$, und die zwölf Quadrupel, welche sie aus der Curve schneiden, sind somit identisch mit den vier Quadrupeln der Berührungspunkte der Tangenten oder der Berührungs-Quadrupel[1]), wie wir uns kurz ausdrücken wollen. Die auf jeder Fläche gelegenen drei Paare von Linien $g$ gehen nach den B.-Quadrupeln der drei andern und die durch ein B.-Quadrupel bestimmten drei Paare von Linien $g$ sind die Doppelelemente der Involution der drei übrigen.

Die von uns betrachteten zusammengehörigen vier Hyperboloide gehören paarweise verschiedenen Serien mit reellen und nicht reellen Tangenten an (D. G. Bd. II p. 358); von den vier B.-Quadrupeln sind daher zwei reell, nämlich $M$ und $N$, die beiden andern $P$ und $Q$ imaginär, aber je auf einem reellen Paare von Linien $g$.

4. Man fasst die Involution vierter Ordnung im Flächenbüschel übersichtlich zusammen durch die Involution von Tangentialebenen an die einzelnen Gruppen im Centrum $C$ der Projection, deren Spuren vom Punkte $S_t^c$ nach den Gruppen von F.-Punkten $F$ gehen. Eine Vereinigung zweier Flächen einer Gruppe in eine einzige entsteht, wenn eine Verbindungsgerade zweier Punkte $F$ durch $S_t^c$ geht; im Raume sind also diejenigen Linien $g$ zu finden, welche die Tangente $t$ im Centrum schneiden, d. h. die sechs Linien $g$ des durch $t$ bestimmten Hyperboloids $H^c$, welche mit $t$ zur andern Schaar gehören.

Ihre Bilder sind demnach die Doppelelemente der drei Involutionen, welche durch die Tangentenpaare nach den Punkten $M_i'$ am Punkte $S_t^c$ bestimmt sind, und ihre Bestimmung erfolgt durch drei bekannte Pole $P$ eines Tripels bezüglich des

1) In Analogie mit der vorigen Abkürzung schreiben wir fortan B.-Quadrupel.

Spurkreises $S^c$. Zwei der construirten Doppelstrahlenpaare $s_v^{(4)}$ sind somit reell, aber nur das eine mit reellen Schnittpunkten $F_v^{(4)}$ der $C_3$. Diese Geraden sind die Spuren der projicirenden Tangentialebenen der sechs sich selbst entsprechenden oder Vierschlussflächen $V^{(4)}$, von welchen daher zwei hyperbolisch, zwei reell elliptisch und zwei nicht reell sind[1]). Es zeigt sich dabei insbesondere, dass die Vereinigung paarweise innerhalb dreier verschiedener Gruppen vor sich geht, so dass eine solche Gruppe nur Flächen $V^{(4)}$ enthält, eine Eigenschaft, die sich später wiederholt. In jeder der drei Gruppen sind die beiden B.-Quadrupel paarweise zu achtpunktigen Gruppen zusammengetreten, und für jede von diesen liegen in beiden Schaaren zwei Paare von Linien $g$ auf der einen, das dritte auf der andern Fläche; sie sind somit die drei Paare achtpunktiger Gruppen, welche die drei Raumcurven $R_{12}$ aus der Curve $R_4$ herausschneiden[2]).

Aber die für das Hyperboloid $H^c$ abgeleiteten Beziehungen gelten auch für die drei andern Flächen der Gruppe. Durch die beiden Regelschaaren werden die vier achtpunktigen Gruppen von Berührungspunkten in zwei Abtheilungen von Quadrupeln $M, N, P, Q$ und $M^*, N^*, P^*, Q^*$ getheilt; dann sind die sechs Ebenen durch jeden der vier Punkte eines unbezeichneten Quadrupels — sagen wir beispielsweise $M$ — nach den drei Paaren von Verbindungslinien innerhalb der drei bezeichneten $N^*, P^*, Q^*$, welche mit den Tangenten in $M$ auf derselben Fläche liegen, die Tangentialebenen der sechs sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(4)}$ in den Punkten $M$; d. h. die Verbindungsgeraden der Punkte eines unbezeichneten Quadrupels $M$ mit denjenigen der drei bezeichneten $N^*, P^*, Q^*$ sind zu acht Erzeugende derselben Fläche $V^{(4)}$; die sechszehn Verbindungsgeraden der Punkte $M_i'$ mit den Punkten $N$ unserer Figur gehen daher zu vieren durch die Punkte $F_v^{(4)}$.

1) Man vergl.: Voss: Math. Annalen Bd. V. p. 164, wo diese Flächen zuerst auftreten.

2) Sie sind die 24 Punktepaare mit der Beziehung, dass jeder von beiden in der Schmiegungsebene des andern liegt.

Nach der eben ausgesprochenen Beziehung verbinden die Seiten jedes Polygons einer Fläche $V^{(4)}$ zwei Punkte $M$ mit zwei Punkten $N^*$; seine Diagonalen sind Linien $g$ und schneiden demnach für das zusammengehörige Paar der hyperbolischen Flächen $V^{(4)}$ die Gegenkanten $M_2 M_3$ und $M_1 M_4$; für das Paar elliptischer $V^{(4)}$ die Kanten $M_2 M_4$ und $M_1 M_3$; endlich für das Paar der nicht reellen $V^{(4)}$ die Kanten $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$. Als conjugirte Geraden der Flächen $V^{(4)}$ bestimmen sie ferner an den genannten Kantenpaaren die Polarinvolutionen $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ der Umrisskegel des zugehörigen Paares der $V^{(4)}$ aus den Punkten $M_i$, und weil die Ebenenpaare durch eine Kante nach vier Punkten $M$ oder $N^*$ ein Paar der Involution der Tetraederebenen bilden, so kann an jedem windschiefen Kantenpaar durch eine Transformation der einen Elementenreihe in dieser die Involution $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ der einen Fläche in diejenige $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ der andern übergeführt werden und umgekehrt. Weil endlich jede Ebene zweier Punkte $N^*$ durch eine Tetraederkante auch zwei Punkte $N$ enthält, so können wir mit Benutzung einer der Involutionen $\mathfrak{P}^{(2)}$ an drei Kanten durch dieselbe Ecke $M_i$ zu einem Quadrupel von Punkten $M$ die drei übrigen der $N$, $P$, $Q$ ableiten.

Die Doppelelemente der einen Involution, $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ beispielsweise, sind stets reell, und das symmetrische Paar der andern $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ mit nicht reellen; sie gehen nach den drei Paaren der achtpunktigen Gruppen von Berührungspunkten der Flächen $V^{(4)}$. Das Paar der Tetraederebenen ferner ist für beide Involutionen seiner Kante das gemeinsame Paar d. h. die zwei Gruppen von acht Verbindungslinien, welche aus der paarweisen Combination der Scheitel $S_i$ der Curve $R_4$ in allen vier Tetraederebenen gleichzeitig entspringen, liegen auf derselben Fläche $V^{(4)}$. Ihre Zahl ist im Ganzen 96 und wird durch die 24 in den Tetraederebenen selbst gelegenen Verbindungslinien auf die Zahl von 120 Geraden zwischen den 16 Punkten stationärer Schmiegungsebenen gebracht. Da also durch Verbindung der direct construirbaren Scheitel $S_i$ die Flächen $V^{(4)}$ sofort erhalten werden, so können zum Quadrupel $M$ die drei andern $N$, $P$, $Q$ zu-

gefügt werden, indem man von den Ecken des Quadrupels $M^*$ aus auf jeder Fläche $V^{(4)}$ das geschlossene Vierseit construirt. Es sei angemerkt, dass in der Ausführung der Taf. I die Scheitel $S_2$ als den $F$ benachbart weggelassen sind.

5. Noch eine räumliche Beziehung. Auf jeder Fläche des Büschels schneiden sich die drei Vierseite von Linien $g$ in 24 Punkten, die in Gruppen zu acht je einer Curve $R_{12}$ angehören. Die Ebene zweier solcher Linien $g$ enthält demnach zwei Punkte aus einem unbezeichneten und zwei aus einem bezeichneten Quadrupel wie z. B. in der Figur die Ebene durch die Gerade vom Bilde $M_1' M_3'$, welche die Gerade zweier Punkte $N$ in $A$ schneidet. Die zwei Paare von Verbindungslinien obiger Gruppen, die nicht Linien $g$, sind also Erzeugende für zwei Flächen $V^{(4)}$; es schneiden sich demnach die Geraden $M_1' N$ und $M_3' N$ in der Projection in zwei Punkten $F_v^{(4)}$, d. h. die gemeinsame Developpable zweier Flächen $R^{(4)}$ ist auch die gemeinsame Developpable zweier Flächen $V^{(4)}$ und zwar jedesmal für ein Paar zusammengehörender derselben, ist also von der vierten Classe[1]).

Diese Developpable vierter Classe ist aber nicht die gesammte Developpable, welche zweien Flächen $V^{(4)}$ gemeinsam ist; vielmehr entsteht aus der Gesammtheit der Ebenen, welche drei Punkte eines Quadrupels enthalten, eine neue, allen drei Flächen $R^{(4)}$ gemeinsame Developpable. Ecke und Gegenebene des Tetraeders aus vier Punkten eines Quadrupels sind Pol und Harmonikalebene in Bezug auf das Tetraeder der Punkte $M_i$ und in dieser reciproken Zuordnung entsprechen die Flächen $R^{(4)}$ aus Linien $g$ sich selbst, der zweien von ihnen gemeinsamen Developpablen ihre gemeinsame Durchdringung zwölfter Ordnung, der ihnen gemeinsamen Durchdringungscurve $R_4$ die ihnen gemeinsame Developpable zwölfter Classe, mit Doppelcurven vierter Classe, welche die Tetraederkanten zu Doppelrückkehrtangenten in den Ebenen $P_i$ besitzen. Jede Curve $R_{12}$ schneidet die Curve $R_4$ in zwei achtpunktigen

1) Man vergl.: Ameseder, Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. Aprilheft 1883. pag. 16, 22, 37.

Gruppen von Berührungspunkten eines Paares von Flächen $V^{(4)}$ und jede Developpable vierter Classe hat mit derjenigen zwölfter Classe die aus jenen entspringenden Octaeder von Tangentialebenen gemein.

Jedes Tetraeder aus vier Punkten eines Quadrupels schneidet die Raumcurve $R_4$ in einem weitern Quadrupel, dem projicirenden für eine Ecke des ersten als Centrum und für die durch das Quadrupel bestimmte Gruppe der Flächeninvolution. Das zweite Quadrupel wird demnach von den Schmiegungsebenen der $R_4$ in den Ecken des ersten ausgeschnitten. Von den zwölf Ebenen der Developpablen zwölfter Classe durchs Centrum sind drei die Ebenen des durch dasselbe bestimmten Quadrupels, die neun andern enthalten je drei Punkte eines solchen, für welche das Centrum der vierte Schnittpunkt ihrer Ebene ist; diese Ebenen sind die gemeinsamen projicirenden Tangentialebenen der drei Flächen $R^{(4)}$; ihre Spuren somit die gemeinschaftlichen neun Tangenten von drei Curven dritter Classe, den Projectionen der Regelflächen $R^{(4)}$ aus einem ihrer Punkte; also der drei Curven, welche durch die Verbindungslinien der Gruppen von F.-Punkten umhüllt werden. Die Gegenecke einer jeden der neun projicirenden Tangentialebenen besitzt eine Schmiegungsebene durchs Centrum, ihre Projection ist also einer der neun Wendepunkte des Curvenbildes $C_3$. Auf ihre nähere Bestimmung und gegenseitige Lage kommen wir im Folgenden zurück.

## II. Die Achtschluss-Involution. — Verallgemeinerung.

6. Sei jetzt in Taf. II unter Voraussetzung derselben Disposition die Flächengruppe mit dem projicirenden Quadrupel der $F$ gegeben, deren Tangenten sich in einem Punkte $T$ der $C_3$ begegnen und mit den drei weitern Punkten $T$ als den Diagonalpunkten des Vierecks der $F$, sowie das Quadrupel der Punkte $N$. Die Verbindung jedes der vier Quadrupel $M, N, P, Q$ mit sich selbst, d. h. die vier Tangenten in den Punkten desselben und die drei Diagonalenpaare liefern vier Mal dieselbe Gruppe von vier Flächen, in der Projection demnach vier Mal die Punkte $F$. Wir können aber auch die ver-

schiedenen Quadrupel unter einander verbinden, und führen dies zunächst im Bilde mit den beiden reellen $M$ und $N$ derselben aus.

Wir wissen bereits, dass wir dadurch auf ein neues Quadrupel geführt werden, dessen Punkte mit $F_1$ bezeichnet seien. Betrachten wir jetzt eine Combination eines Punktes $F$ mit einem Punkte $F_1$ auf dem unendlichen Aste, so kann der (in Taf. II stärker hervorgehobene) Linienzug $MNNM$ des Ovals in Verbindung mit den Tangenten im Anfangs- und Endpunkte $M$ als ein degenerirtes Polygon von acht Seiten und Ecken, mit drei Doppelseiten und vier Paaren zusammenfallender Ecken, angesehen werden. Fassen wir also den Doppelstrahl $FN$ und das Tangentenpaar $FM$ für jeden Curvenast als zwei Gruppen einer Strahleninvolution vierter Ordnung am Punkte $F$, die resp. Verbindungslinien $MN$ durch $F_1$ für Oval und unendlichen Ast als zwei paarweise zu Doppelstrahlen vereinigte Gruppen einer analogen Involution an $F_1$ auf, construiren wir sodann in jeder Involution die dem gemeinsamen Scheitelstrahl $FF_1$ entsprechende Gruppe, so entsteht aus einer projectivischen Verbindung beider Involutionen, wenn die beiden ersten Gruppen, welche zusammen je ein degenerirtes Polygon bilden, sowie die beiden zuletzt construirten sich entsprechen, eine Curve von der Ordnung sieben, mit dreifachen Punkten in $F$ und $F_1$. Aber wir bemerken aus der besondern Art der beiden bestimmenden Gruppen der Involutionen vierter Ordnung, dass jede Gruppe derselben sich aus zwei Paaren einer quadratischen Involution zusammensetzt, welche an jedem Punkte der $C_3$ für den Vierschluss auftreten.

Aus diesem Umstande folgt, dass das Erzeugniss zerfällt in eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in den Scheiteln $F$ und $F_1$, und in eine Curve dritter Ordnung, welche einfach durch diese hindurchgeht. Zwei entsprechende Gruppen der Strahleninvolutionen begegnen sich in sechszehn Punkten, welche in Gruppen zu acht auf der einen und andern Curve liegen, so dass für beide derselben ein geschlossenes Polygon von acht Ecken und Seiten entsteht, diese vier Mal paarweise in Strahlen durch die Punkte $F$ und $F_1$ gelegen und jene zwei

Mal zu vieren durch diese gehend, so dass für jede Seite die beiden auf der $C_3$ gelegenen Schnittpunkte von Strahlen verschiedener Paare der quadratischen Involution herausgeschnitten werden, weil sonst nothwendig Polygone von vier Seiten auftreten müssten.

Die so entstehende Curve dritter Ordnung hat mit der vorliegenden zwei Punkte $M$ und ihre Tangenten, die Punkte $N$ sowie $F$ und $F_1$ gemeinsam, muss also wieder mit ihr identisch sein. Zur Gruppe, welche durch die Verbindungslinie $FF_1$ bestimmt ist, gehört in der Involution an $F$ die Tangente der $C_3$ in diesem Punkte und somit auch der entsprechende Strahl zu diesem in der quadratischen Involution, d. h. der Strahl nach dem andern Punkte $F$ des unendlichen Astes. Zu der entsprechenden Gruppe an $F_1$ gehört ebenfalls die Tangente der Curve, und weil die Tangente in $F$ diese nicht in einem Punkte der $C_3$ treffen kann, so muss der Strahl nach dem Punkte $F$ der Tangente von $F_1$ in einem Punkte der $C_3$ begegnen, also in dem bekannten Punkte $T$ des unendlichen Astes. Als Bildpunkte eines Quadrupels gehen aber die Tangenten aller vier Punkte $F_1$ nach $T$ und ebenso schneiden sich die Seiten ihres Vierecks paarweise in den drei andern $T$ (Art. 2), so dass die Punkte $F_1$ aus dem zweiten Punkte $T$ des unendlichen Astes genau so hervorgegangen sind, wie die Punkte $F$ aus dem ersten Punkte $T$:

Der Tangentialpunkt der $F_1$ ist somit Schnittpunkt zweier Verbindungsgeraden von Punkten $F$ und der Tangentialpunkt der $F$ Schnittpunkt zweier Verbindungslinien von Punkten $F_1$, somit die Bedingung des Achtschlusses für jede Combination eines Punktes $F$ mit einem Punkte $F_1$ erfüllt.

Bis jetzt haben wir nur die beiden reellen Quadrupel $M$ und $N$ betrachtet, mit den beiden Punkten $F$ des unendlichen Astes als Tangentialpunkten resp. Die beiden weitern Punkte $F$ des Ovals sind die Tangentialpunkte der nicht reellen Quadrupel $P$ und $Q$, und weil die Verbindungslinie dieser beiden $F$ durch den Tangentialpunkt $T$ der Gruppe $F_1$ geht, so begegnen sich auch die Verbindungslinien der Quadrupel $P$ und

$Q$ in der Gruppe der Punkte $F_1$. Die paarweise Combination der Quadrupel, wie $MN$ und $PQ$, $MP$ und $NQ$, $MQ$ und $NP$ führen somit zu drei neuen Quadrupeln von Punkten $F_1, F_2, F_3$ resp., für welche die Punkte $T$ die Tangentialpunkte sind. Sie bilden mit der Gruppe der $F$ ein geschlossenes Element einer Punktinvolution sechszehnter Ordnung derart, dass je zwei Punkte aus verschiedenen Gruppen zu vier F.-Punkte sind für eine unendliche Folge Steiner'scher Achtseite.

Man kann aber in Taf. II den Ausgangspunkt $M$ des degenerirten Polygons auf dem Oval auch mit dem zweiten Punkte $N$ auf diesem verbinden, erhält als Schnittpunkt einen zweiten Punkt der Gruppe $F_1$ und kann mit diesem als zweitem F.-Punkt das Polygon vollenden, ohne dass die Seiten durch $F$ sich ändern; d. h. jeder Punkt lässt sich mit einem Paar von F.-Punkten für den Achtschluss combiniren, so dass seine Strahleninvolution für beide dieselbe bleibt.

Weil die vier Gruppen $F_i$ aus den $T$ so entstanden, wie die $M, N, P, Q$ aus den vier Punkten $F$, so besitzen auch zwei Punkte $M$ und $N$ die Eigenschaft von F.-Punkten, wie die Figur ohne Zuziehung weiterer Hülfslinien bestätigt.

Den vier Gruppen von Punkten $F_i$ entsprechen im Raume vier Quadrupel von Flächen der Vierer-Involution, ein Element einer Flächeninvolution sechszehnter Ordnung, deren Regelschaaren sich zu geschlossenen Steiner'schen Sekantenpolygonen von acht Seiten zusammenfügen. Da die projicirende Gruppe der Punkte $F_i$ denselben Zusammenhang aufweist, wie die Gruppe der vier Quadrupel $M, N, P, Q$, so folgt daraus, dass die Flächeninvolution wieder auf doppelte Weise entsteht, durch Verbindung der vier B.-Quadrupel aller Elemente der Viererinvolution mit einem beliebigen Punkte der Curve $R_4$ und durch Verbindung aller ihrer Punkte mit einer einzigen solchen Gruppe, und es ist klar, dass darin dasselbe Gesetz der Ableitung aller Gruppen der Punkt-Involution sechszehnter Ordnung aus einer, sowie derselbe Zusammenhang zwischen drei Gruppen $P$, $P'$ und $F$ für das Bild fortbestehen, wie er für die Viererinvolution in Art. 3 ausgesprochen worden ist.

Drei solche Gruppen sind im Bilde aus drei Vierergruppen abgeleitet, deren Tangentialpunkte in gerader Linie liegen. Die Ecken jedes Achtseits für ein Paar von F.-Punkten $F$ sind vier Paare von Punkten, die vier verschiedenen Vierergruppen, und zu vier den Gruppen $P$ und $P'$ angehören. Zu jedem Achtseit giebt es drei andere, deren Ecken zusammen die beiden Gruppen $P$ und $P'$ erfüllen, welche für jeden der Punkte $F$ perspectivisch liegen, so dass für jedes Polygon die vier Ecken gerader Zahl zur Gruppe $P$, die vier ungerader Zahl zur Gruppe $P'$ gehören. Die Involutionen vierter Ordnung am Punkte $F$ sind entstanden, indem für jede der drei quadratischen Involutionen dem Tangentenpaar das eine oder andere Doppelelement dieser Involution als zweites Paar zugeordnet wurde. Diese Strahlen gehen nach den reellen einer Gruppe von sechszehn Punkten, deren Vierergruppen somit durch die Einordnung ihrer Elemente in Paare einer der quadratischen Involutionen selbst involutorisch gepaart werden, so dass ein Strahlenpaar aus der einen mit einem der beiden aus der zweiten Gruppe sich zu einer vierstrahligen Gruppe zusammensetzt. Die Anzahl der verschiedenen Involutionen vierter Ordnung am Punkte $F$ ist somit sechs; jede sechszehnpunktige Gruppe liefert vier solcher Gruppen für jede Involution.

7. Die Verbindungslinien der drei Paare von B.-Quadrupeln einer Flächengruppe des Vierschlusses liefern die drei ergänzenden Gruppen eines Flächenelementes $G$ des Sechszehnschlusses, und da diese vier Vierergruppen $G_i$ mit den resp. B.-Quadrupeln $(MNPQ)_i$ sich untereinander gleichartig verhalten, so müssen irgend drei Gruppen $G_i$ aus der vierten auf dieselbe Weise entstanden sein. Jede Gruppe $G_i$ enthält also 32 Gerade, welche zwei Punkte aus verschiedenen Quadrupeln einer andern Gruppe $G_i$ verbinden, ohne Linien $g$ zu sein, so dass auf jeder Fläche 24 liegen. Nun lässt sich jede Fläche mit zwölf andern combiniren, welche paarweise dieselbe, also sechs verschiedene Involutionen ihrer Regelschaaren bestimmen, welche zu Folge ihrer Zusammensetzung aus Paaren einer quadratischen Involution je ein Paar von Linien $g$ zu

Doppelelementen besitzen; und weil die 24 übrigen Doppelelemente nothwendig zu Erzeugenden der andern Fläche führen müssen, welche Tangenten der $R_4$ sind, so können sie nur die obigen 24 Verbindungslinien auf der Fläche sein.

Für das durch die Centrumstangente bestimmte Hyperboloid $H^c$ und dessen Regelschaar, welche diese schneidet, ergiebt die Construction der Doppelelemente der sechs Involutionen die projicirenden Tangentialebenen an die sich selbst entsprechenden in Paaren vereinigter Achtschlussflächen $V^{(8)}$. Ihre Anzahl ist somit 24 und wird durch die sechs Vierschlussflächen, welche nothwendig Doppelelemente der Involution sechszehnter Ordnung sind, auf die Anzahl von 30 gebracht.

Die sechs Involutionen am Punkte $S_t^c$ in Taf. II sind leicht durch zwei Gruppen zu bestimmen; eine solche besteht nämlich jedesmal aus dem Bilde einer Linie $g$ und den Tangenten in zwei Punkten $M_i'$. Wir haben somit um jeden der drei Pole $P_i$ in Bezug auf den Spurkreis $S^c$ drei quadratische Involutionen; für jeden Pol ist zwei Mal eine Tangente an die Spur dieses Kreises in Verbindung mit einer Geraden nach zwei Durchstosspunkten $S$ von Tangenten in Punkten $M_i'$ je ein Paar. Man bemerkt, dass eine der Involutionen an jedem Pole $P_i$ auf zwei Paare von Flächen $V^{(4)}$ führen muss; die beiden andern ergeben durch die Schnittpunkte ihrer Doppelstrahlen mit dem Kreise $S^c$ drei Mal vier Paare von Spuren $s_v^{(8)}$ projicirender Tangentialebenen an die Flächen $V^{(8)}$; diese treten somit als sechs Vierergruppen auf. Die beiden Involutionen an $P_1$ führen dabei auf vier hyperbolische und vier nicht reelle Flächen $V^{(8)}$; für den Pol $P_2$ sind beide Involutionen nicht reell, da ein reelles mit je einem nicht reellen Element zu combiniren ist: wir erhalten acht weitere imaginäre Flächen $V^{(8)}$; die Involutionen an $P_3$ endlich führen zu vier reellen elliptischen und vier nicht reellen Achtschlussflächen.

Die 120 Verbindungslinien zwischen zwei reellen achtpunktigen Gruppen $MM^*$ und $NN^*$ setzen sich zusammen aus 32 Kegelerzeugenden $MM^*$, $NN^*$; 24 Linien $g$, wie $MM$, $NN$; 32 Seiten geschlossener Vierseite $NM^*$, $N^*M$ des hy-

perbolischen Paares $V^{(4)}$ und 32 Geraden $NM$, $N^* M^*$, welche sich zu geschlossenen Vierseiten der $R_4$ zusammensetzen, und die Projectionen der vorigen auf die Raumcurve aus den Ecken $M_i$ sind. Die Gesammtheit dieser Vierseite erfüllt daher zwei Regelflächen $R_1^{(8)}$, welche die Raumcurve zur Doppelcurve besitzen; jene Vierseite bestimmen, mit den Kegelspitzen verbunden, die doppeltumschriebenen Developpablen dieser Flächen: als Umrisskegel der einen Fläche $V^{(4)}$ aus $M_2$ und $M_3$, als Umrisskegel der andern $V^{(4)}$ aus $M_1$ und $M_2$ für die eine, und umgekehrt für die andere Regelfläche. Daraus folgt, dass jede Fläche des Büschels acht Erzeugende mit jeder gemein hat, dass sie somit von der achten Ordnung sind.

In der That gehören ihre aus der Verbindung reeller Quadrupel entstehenden Erzeugenden zu acht je zweien, die aus der Verbindung der nicht reellen Quadrupel $PP^*$, $QQ^*$ entstehenden zu acht den beiden andern Flächen einer Vierergruppe an. Die Regelflächen $R_1^{(8)}$ treten also in Paaren mit denjenigen der Flächen $V^{(4)}$ auf, und können aus diesen durch Projection aus den Tetraederecken direct abgeleitet werden; ausser der Doppelcurve $R_4$ besitzen sie noch in jeder Tetraederebene $P_i$ eine unicursale Doppelcurve vierter Ordnung und sechster Classe mit Doppelinflexionsknoten in den Punkten $M_i$.[1]) Ihre Projectionen bilden die sechs Curven sechster Classe, welche von den Verbindungslinien der sechszehn Punkte $F_i$ jeder Gruppe umhüllt werden; die vier aus dem Punkte $S_t^c$ an jede gehenden Tangenten sind die bereits construirten Spuren $s_v^{(8)}$.

Die vier Diagonalen jedes Achtseits auf den Flächen $V^{(8)}$ einer Vierergruppe schneiden wieder dasselbe Gegenkantenpaar im Tetraeder, und bestimmen damit an diesen zwei biquadratische Ebeneninvolutionen $\mathfrak{P}_1^{(4)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(4)}$, die sich aus Paaren der quadratischen Polarinvolutionen $\mathfrak{P}_i^{(2)}$ zusammensetzen. Aus jeder Vierergruppe von Flächen $V^{(8)}$ geht ein solches Involutionenpaar hervor, mittelst dessen man zu einem Qua-

1) Man vergl.: Ameseder, Sitzb. Aprilheft 1883 p. 26 und die dort bemerkte Literaturnotiz.

drupel $M$ die fehlenden fünfzehn construirt, zu denen man auch von den Punkten $M^*$ aus durch Construction der geschlossenen Achtseite auf den Flächen $V^{(8)}$ gelangt.

Die sechszehn Punkte $F_i$ lassen 96 Combinationen zu zweien zu; aus jeder entspringt nebst unserer Curve dritter Ordnung eine solche vierter Ordnung $C_4$ mit Doppelpunkten in den F.-Punkten; sie sind für ein Paar von Punkten $F_v^{(8)}$ Bilder von Raumcurven $R_4'$ der Flächen $V^{(8)}$, welche noch durch die Regelschaarinvolutionen auf diesen erzeugt werden. Durch jedes der sechszehn B.-Quadrupel gehen zwölf Curven $C_4$; die vier Gruppen zu vier, in welche sich die B.-Quadrupel theilen, enthalten in den beiden ersten zwei reelle und zwei nicht reelle, in den beiden andern keine reellen Vierergruppen. Durch jede reelle Gruppe gehen vier reelle $C_4$; von diesen enthalten je zwei ein weiteres reelles, zwei ein weiteres nicht reelles Quadrupel.

8. Verbinden wir jetzt die Gruppen von je vier Quadrupeln $(MNPQ)_i$ mit verschiedenen Indices untereinander, so wissen wir, dass aus jeder solchen Verbindung eine neue Gruppe von sechszehn Punkten des Curvenbildes entsteht. Betrachten wir etwa die beiden reellen Quadrupelpaare $MN$ und $M_1 N_1$ mit den Tangentialpunktepaaren $F$ und $F_1$, so können wir analog wie in Taf. II mit der Tangente in einem Punkte $M$ auf dem Oval und unpaaren Ast beginnend und schliessend, den Linienzug $MN_1 M_1 NNM_1 N_1 M$ als degenerirtes Polygon mit sieben Doppelseiten und acht Doppelecken auffassen.

Man erkennt unmittelbar wieder, dass die Gruppen der an den Scheiteln entstehenden Strahleninvolutionen achter Ordnung sich aus zwei Gruppen der Involution vierter Ordnung an diesem Punkte zusammensetzen, nämlich jedes Mal aus einem Paar von Tangenten und drei von den sechs Doppelelementen der Involution vierter Ordnung am Punkte $F$. Der Tangente speciell im neuen Scheitel entsprechen in der andern Involution am Punkte $F$ zwei Gruppen von vier Strahlen, aber je nur ein Strahl aus einer solchen begegnet ihr in einem Punkte der $C_3$. Derjenige Strahl nun, welcher sie in ihrem dritten Schnittpunkte mit der Curve trifft, gehört

nothwendig zur Gruppe derjenigen vier, welche die Verbindungslinie der beiden Scheitel nicht enthält, zu welcher somit die Tangente in $F$, sowie der Strahl nach dem zweiten Punkte $F$ des unendlichen Astes und die Strahlen nach zwei Punkten $F_1$ gehören. Einer dieser beiden letztern Strahlen muss der Tangente auf der $C_3$ begegnen und jeder Punkt einer der drei neuen Gruppen, der mit $F$ ein Paar von F.-Punkten für den Sechszehnschluss bildet, ist somit bloss an die Bedingung geknüpft, den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie eines Punktes $F$ mit einem Punkte $F_1$ zum Tangentialpunkte auf der $C_3$ zu haben, d. h. ihre Gesammtheit wird gebildet durch die drei Gruppen von je sechszehn Punkten, welche die drei Schnittpunktegruppen $T_i$ sämmtlicher Verbindungslinien der sechszehn Punkte $F$ und $F_i$ auf der $C_3$ zu Tangentialgruppen haben. Weil dabei die Gruppen $T_i$ aus paarweisen Combinationen der vier Gruppen $F$ und $F_i$ entstehen, so gehen die drei neuen Gruppen $F$ ebenfalls aus der paarweisen Combination der vier Gruppen $(MNPQ)_i$ hervor.

Im Raume führen diese Verbindungslinien zu drei neuen Flächengruppen, sie bilden mit der ersten das Element einer Flächeninvolution von der Ordnung 64, für Steiner'sche Secantenpolygone von sechszehn Seiten. Die Gruppe der projicirenden Strahlen hat dabei denselben Zusammenhang, wie diejenige der B.-Quadrupel; wir schliessen daraus die doppelte Entstehungsart der Flächeninvolution und die Clebsch'schen Sätze wie in Art. 3.

Jede Fläche lässt sich mit 48 andern combiniren, welche auf ihr zwölf verschiedene Involutionen ihrer Regelschaaren erzeugen; von den Doppelelementen derselben sind $12 \cdot 6$ Doppelelemente der biquadratischen Involution; es bleiben als eigentliche solche 96 übrig, die 96 Verbindungslinien zwischen den Berührungspunkten der Tangenten derjenigen drei Gruppen von sechszehn Flächen, zu welchen die betrachtete nicht gehört. Es giebt demnach auch 96 sich selbst entsprechende Flächen $V^{(16)}$ mit je drei weitern Raumcurven $R_4'$ als Erzeugniss ihrer Regelschaarinvolutionen. Sie setzen sich zusammen aus sechszehn hyper-

bolischen, sechszehn reellen elliptischen und 64 nicht reellen Flächen. Auf ihren Zusammenhang mit den Flächen $V^{(4)}$ und $V^{(8)}$ kommen wir zurück.

Die Projectionen aller auf den Flächen $V^{(8)}$ gelegenen Polygone aus den Ecken $M_i$ auf die Raumcurve führen auf 24 neue Regelflächen $R_2^{(8)}$, welche die $2 \cdot 96$ Doppelstrahlen jeder Fläche in beiden Schaaren mit dieser zu acht gemein haben. Das Auftreten von Polarinvolutionen $\mathfrak{P}_i^{(8)}$ und die Ableitung zusammengehöriger Punktegruppen von 64 aus solchen von vier oder sechszehn Punkten hängt damit zusammen.

9. Das bis dahin zur Anwendung gekommene Verfahren lässt sich offenbar beliebig oft wiederholen. Durch Construction der B.-Quadrupel und ihrer Verbindungslinien geht aus jeder Flächeninvolution diejenige nächst höherer Ordnung hervor, auf welche dieselbe Erweiterung wieder angewendet werden kann. Diese Constructionen für das Curvenbild ausgesprochen, ergeben für die Involutionen von F.-Punkten auf der Curve dritter Ordnung folgenden Zusammenhang:

Wir gehen aus von einer Gruppe von vier Punkten $F$ des Vierschlusses; die Tangenten aus einem dieser Punkte bestimmen auf der $C_3$ vier Berührungspunkte $B$ vom selben Zusammenhang wie die $F$: ihre Verbindungslinien gehen paarweise durch die drei Ergänzungspunkte $F$, welche selbst den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt $T$ besitzen. Die Tangenten aus diesen Ergänzungspunkten $F$ bestimmen drei weitere Gruppen $B$ von Berührungspunkten; sie bilden als Ergänzungsgruppen zur Gruppe $B$ mit dieser eine sechszehnpunktige Gruppe $B_1$, welche in Bezug auf ihre Untergruppen $B$ denselben Zusammenhang aufweist, wie die Punkte $F$; d. h. mit Verbindungslinien der Gruppen $B$, welche in paarweiser Combination zu drei neuen Gruppen $F$ führen, den Ergänzungsgruppen der ersten zu einer sechszehnpunktigen Gruppe $F_1$ von der Art der Gruppe $B_1$. Die Gruppe $F_1$ besitzt die Gruppe $T$ zur Tangentialgruppe und zwei Punkte aus verschiedenen Vierergruppen in $F_1$ sind F.-Punkte für den Achtschluss. Mit den Tangenten aus den Ergänzungsgruppen $F$ fügen wir zur Gruppe $B_1$ drei neue solche einer Gruppe $B_2$

hinzu; die Verbindungslinien innerhalb der Gruppe $B_2$ führen zu den Ergänzungsgruppen $F_1$ des Sechszehnschlusses u. s. f.

Da die Gruppe der $B$ von derselben Art ist, wie diejenige der $F$, die Gruppe der $B_1$ von derselben Art wie diejenige der $F_1$ u. s. f., weil ferner $T$ der Tangentialpunkt der Gruppe $F$, diese Gruppe die Tangentialgruppe der Gruppe $B_1$; $F_1$ die Tangentialgruppe der Gruppe $B_2$ ist, so folgt:

Aus der Gruppe des Vierschlusses entsteht diejenige des Achtschlusses durch Tangentenziehen als Gruppe der Berührungspunkte; durch dieselbe Operation aus dieser die Gruppe des Sechszehnschlusses u. s. f., d. h. die Ordnung jeder folgenden Involution ist durch Multiplication mit 4 aus derjenigen der vorhergehenden ableitbar: somit die Involution für den $2n = 2 \cdot 2^k$-Schluss von der Ordnung $2^{2k} = n^2$.

Die obige Darstellung giebt die Entwicklung des Involutionselementes aller Involutionen von einem bestimmten Anfangspunkte aus durch Zufügen von je drei Ergänzungselementen derselben Art zu einem Element der folgenden Involution. Sie enthält den Steiner'schen Fundamentalsatz in der Form, dass die durch die Verbindungslinien einer Gruppe von F.-Punkten abgeleiteten drei Untergruppen die Tangentialgruppen ihrer Ergänzungsgruppen sind; seine Begründung liegt in dem organischen Aufbau der die Curve $C_3$ als Theil erzeugenden Strahleninvolutionen aus Gruppen der jedesmal vorhergehenden Involution, welcher bei beliebig oft wiederholter Fortsetzung des Verfahrens fortbestehen bleibt.

Lässt man die Entwicklung der Elemente gleichzeitig von drei Punkten $T$ einer Geraden ausgehen, so entstehen aus ihnen drei Gruppen $P$, $P'$ und $F$ von je $2^{2k}$ Punkten, von denen jede die Schnittpunktegruppe der Verbindungslinien zwischen den beiden andern ist, derart, dass diese Verbindungslinien sich für jedes Paar von F.-Punkten der dritten Gruppe zu $2^k$ Steiner'schen Polygonen von $2 \cdot 2^k$ Seiten zusammenfügen, so dass die geraden Ecken als die Punkte der einen und die ungeraden als Punkte der andern Gruppe er-

scheinen. Dadurch entstehen an jedem Punkte $F$ aus jeder solchen Punktegruppe $2^k$ Gruppen derselben Strahleninvolution von der Ordnung $2^k$, über deren Anzahl und Zusammensetzung sich folgende Uebersicht aufstellen lässt, wenn man jetzt an Stelle der degenerirten Polygone, wie früher, allgemeine setzt:

An jedem Punkte $F$ existiren drei quadratische Strahleninvolutionen, deren Elemente nach den je drei Paaren von Punkten gehen, in welche sich die vier Punkte jeder Vierergruppe ordnen lassen. Vier derartige vierstrahlige Gruppen setzen sich zu einer Gruppe von sechszehn Strahlen zusammen. Ordnet man alle Elemente einer solchen in Paare einer der drei quadratischen Involutionen, so wird dadurch jeder Vierergruppe eine zweite zugeordnet; ein Paar der ersten bildet mit jedem der beiden Paare der zweiten Gruppe ein Element der Involution vierter Ordnung. Die Zahl der verschiedenen Strahleninvolutionen vierter Ordnung am Punkte $F$ ist somit sechs, und jede derselben ist durch vier Gruppen bestimmt.

Ergänzt man im Weitern die 16 Strahlen durch drei weitere Gruppen zu 64, und ordnet man ihre Elemente in Gruppen einer der sechs Involutionen vierter Ordnung, so ist damit zugleich die paarweise Zuordnung der sechszehnpunktigen Gruppen selbst vollzogen und zwei vierstrahlige Gruppen aus zwei solchen treten zu einem Elemente der Strahleninvolution achter Ordnung am Punkte $F$ zusammen, so dass die Anzahl der verschiedenen Involutionen zwölf ist.

Offenbar verdoppelt sich bei fortschreitender Entwicklung die Anzahl der auftretenden Involutionen, so dass für die Ordnung $2^{2k}$ die Zahl der verschiedenen Strahleninvolutionen $3 \cdot 2^{k-1}$ und jede durch $2^k$ Gruppen bestimmt ist. Jeder Punkt kann mit $(2^2 - 1)\, 2^{2(k-1)}$ andern combinirt werden, von denen je $2^{k-1}$ am Punkte $F$ dieselbe Strahleninvolution bestimmen; mit ebenso vielen Flächen eine bestimmte Fläche im Büschel; die doppelte Anzahl ist die Zahl der Doppelelemente ihrer Regelschaareninvolutionen und somit $(2^2-1)\, 2^{2k-1}$ die Zahl der eigentlichen $2n$-Schlussflächen $V^{(2n)}$.

Wir erweisen die Richtigkeit dieser Anzahlenbestimmung mit Hinweis auf den Zusammenhang mit andern noch durch

directe Construction der Flächen $V^{(2n)}$. Wenn insbesondere eine der obigen drei Gruppen den Punkt $S_i^c$ enthält, so giebt es aus dem zugehörigen Punkte $T$ drei Tangenten an die $C_3$, denen Gruppen $P$ entsprechen, die mit $P'$ zusammenfallen, wenn ihre Berührungspunkte als Punkte $T$ genommen werden. Es gehen somit $3 \cdot 2^{2k-1}$ Gerade durch den Punkt $S_i^c$, welche zwei Punkte aus derselben Gruppe $P$ verbinden; sie sind die Spuren der projicirenden Tangentialebenen an die Flächen $V^{(2n)}$.

Verlegt man im Raume das Centrum an einen Scheitel der $R_4$, etwa einen in der Ebene $P_4$ gelegenen, so gehen die projicirenden Tangentialebenen an jede Vierergruppe nach den Erzeugenden des Kegels aus $M_4$, welche durch ein Paar der Ebeneninvolution einer der Tetraederkanten, etwa $M_1 M_4$, herausgeschnitten werden. Man sieht, dass dabei auch die elliptischen Flächen sich zu Vierergruppen zusammensetzen. Die drei Paare von Flächen $V^{(4)}$ entstehen durch die Doppelebenen $P_2$ und $P_3$ der Involution und durch das Paar von Tangentialebenen an den Kegel aus $M_4$, in Uebereinstimmung mit dem frühern Resultate, dass die $V^{(4)}$ die Verbindungsgeraden der Scheitel der $R_4$ enthalten.

Die Tangentialebenen durch $M_1 M_4$ an jede Vierergruppe bestimmen im Weitern durch die sechszehn Erzeugenden, die sie aus dem Kegel an $M_4$ schneiden, die projicirenden Tangentialebenen der Involution sechszehnter Ordnung; speciell die Tangentialebenen der 24 Flächen $V^{(8)}$ durch die sechs Paare von Tangentialebenen an die Flächen $V^{(4)}$; die Tangentialebenen durch $M_1 M_4$ an die Flächen $V^{(8)}$ bestimmen die projicirenden Tangentialebenen der 96 Flächen $V^{(16)}$ u. s. f., also eine Ableitung nicht nur der Involutionen, sondern auch ihrer Doppelelemente aus einander, deren Anzahl sich offenbar fortlaufend mit 4 multiplicirt.

Dass mit jeder Vierergruppe von Flächen $V^{(2n)}$ zwei Involutionen $\mathfrak{P}_i^{(n)}$ und vier Regelflächen $R_k^{(8)}$ achter Ordnung auftreten, sei hier nur erwähnt; über ihre Bedeutung auch für die Projection kann nach dem Früheren kein Zweifel mehr bestehen.

## III. Modification für die Specialformen der Durchdringung.

10. Die bisherige Untersuchung bezog sich auf den **Fall** der zweitheiligen Raumcurve $R_4$ mit vier reellen doppelt projicirenden Kegeln; es bleibt übrig, sie auf die Fälle der Durchdringung mit nur zwei oder gar keiner reellen Kegelfläche, sowie auf die Curve mit Doppelpunkt und die Degenerationsformen auszudehnen.

Die Durchdringung mit vier nicht reellen Kegeln zunächst kann auf den besprochenen Fall zurückgeführt werden durch den Nachweis, dass ein und dieselbe vorgelegte Curve $C_3$ aufgefasst werden kann als Bild der Grundcurve eines Flächenbüschels sowohl mit vier reellen, als mit vier nicht reellen Kegelflächen. Auch im letztern Falle ist die Raumcurve zweitheilig; alle Flächen des Büschels verhalten sich ihr gegenüber gleichartig, d. h. alle sind einfache Hyperboloide, enthalten je vier reelle Tangenten der einen, und vier nicht reelle Tangenten der andern Schaar. Im Gegensatze zum vorhergehenden Falle aber verhalten sich die beiden Regelschaaren jeder Fläche jetzt ungleichartig; die eine mit reellen Tangenten verbindet reelle oder conjugirt imaginäre Punktepaare je desselben Astes, die andere Punkte des einen Astes mit Punkten des andern. Jede Ebene des Raumes trifft demnach jeden der Aeste entweder in einem stets reellen, oder in drei Punkten, wovon zwei conjugirt imaginär sein können, nie aber jeden Ast in zwei Punkten.

Die $R_4$ besteht also in diesem Falle aus zwei sich stets mit einem reellen Punkte ins Unendliche erstreckenden Aesten; der eine derselben wird sich bei einer Centralprojection aus einem Punkte desselben als Oval, der andere als unpaarer Ast abbilden; der Durchstosspunkt $S_t^c$ der Centrumstangente liegt also jetzt auf dem Ovale.

Die Spurkreise der sich selbst entsprechenden Hyperboloide in Taf. I ergaben sich als diejenigen Kreise $V^{(4)}$, welche paarweise je zwei Punkte $F_v^{(4)}$ eines Quadrupels enthielten. Wählen wir nun in Taf. II das Quadrupel der Punkte $M$, und ordnen wir je einem Punkte $M$ des unendlichen Astes einen

Punkt $M$ des Ovals zu, betrachten wir dann den Punkt $F$ der Verbindungslinien der Paare als Durchstosspunkt $S_t^{c_1}$ einer neuen Durchdringung, so werden irgend zwei Kreise durch diese Punktepaare mit einem gemeinsamen Punkte der $C_3$ auch den weitern Schnittpunkt mit dieser gemeinschaftlich haben. Da die $M$ F.-Punkte für den Vierschluss sind, so werden die quadratischen Involutionen an ihnen, auf den Kreis durch ihren Scheitel übertragen, je zwei Punkte $P_1$ auf einem Kreise $K_1$ und $P_2$ auf einem Kreise $K_2$ des neuen Büschels mit der Centrale $c_1$ als Erzeugniss projectivischer Sehnenbüschel bestimmen.

Wir können demnach jene Kreise durch $M$ als Spurkreise $V_1^{(4)}$ und $V_2^{(4)}$ zweier sich selbst entsprechender Flächen in der Viererinvolution eines neuen Flächenbüschels auffassen, mit der $C_3$ als Bild einer neuen Grundcurve, aus einem neuen Centrum in ihr und mit vier nicht reellen Kegeln, weil die Bilder ihrer Spitzen $M_i'$ als Berührungspunkte der Tangenten aus $S_t^{c_1}$ nicht reell sein können. Der Punkt $S_t^{c_1}$ bestimmt mit den drei weitern $F$ seines Quadrupels die Spurkreise einer Vierergruppe, zu welcher das Hyperboloid $H^c$ der Centrumstangente gehört, und welche jedesmal der $C_3$ in einem weitern Punkte begegnen, der ein Punkt des Quadrupels $T$ ist.

Die vier Tangenten aus $S_t^{c_1}$ bestimmen an jedem Punkte $F$ eine quadratische Involution, deren Doppelelemente als Verbindungslinien jener Berührungspunkte nothwendig die Bilder der drei Paare von Gegenkanten $g_i', g_k'$ des Tetraeders sind, und man bemerkt, dass nur ein einziges dieser Paare $g_1$, $g_2$, dies aber stets reell ist. Andrerseits sind die Doppelelemente der drei Involutionen an $S_t^{c_1}$ die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Tangenten aus den $F$, also die Spuren der projicirenden Tangentialebenen der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(4)}$. Weil zwei Punkte $F$ je vier reelle Tangenten besitzen, so sind zwei Paare dieser Doppelelemente nach den Punktepaaren $M$ und $N$ reell; von den sechs Flächen $V^{(4)}$ sind daher vier hyperbolisch, zwei mit den Spuren $V_1^{(4)}$ und $V_2^{(4)}$, und zwei nicht reell.

Für jede Vierergruppe kommen bei zwei Flächen die Regelschaaren mit reellen, bei zweien diejenigen mit nicht

reellen Tangenten zur Verwendung; die Spuren $s_v^{(4)}$ sind die Doppelelemente der Regelschaar mit nicht reellen Tangenten und die Bilder der drei Paare von Linien $g$, von denen also zwei reell und somit auch reell schneidend, und eines nicht reell ist. Die andern zusammengehörenden Regelschaaren zeigen ein analoges Verhalten; bei den Hyperboloiden mit reellen Tangenten treten jetzt die Regelschaaren mit nicht reellen auf, und umgekehrt. Die Bilder dieser Regelschaaren sind die Büschel an den Punkten $T$, und speciell sind die drei Involutionen am Tangentialpunkte von $S_t^{c_1}$ die Bilder der Regelschaareninvolutionen, welche die Centrumstangente enthalten. Sie sind bestimmt als die drei Combinationen der vier Tangenten nach den $F$, zwei dieser Involutionen haben reelle Doppelelemente — nur das eine Paar ist reell schneidend — als Bilder der drei Paare von Linien $g$ der andern Schaar.

Jedesmal setzen sich zwei Paare solcher zu einem geschlossenen Vierseit zusammen, in der Projection auf Taf. II das reell schneidende nach den Punkten $N$ durch $S_t^{c_1}$ mit dem reellen, aber nicht reell schneidenden aus $T$ zu einem Vierseit $ABA'B'$, mit $g_1', g_2'$ als Diagonalenpaar. Dem andern reellen Paare am Punkte $S_t^{c_1}$ entspricht das nicht reelle an $T$ und umgekehrt; also zwei Vierseite mit zwei reellen Seiten und vier nicht reellen Schnittpunkten auf imaginären Linienpaaren $g_i', g_k'$ durch die entsprechenden Punkte $F$. Von den zwölf Linien $g$ jedes Hyperboloides sind acht reell, mit drei rellen Quadrupeln auf der Raumcurve, welche die Berührungspunkte der drei mit ihm zu combinirenden Flächen sind, und von welchen zwei oder eines auftreten, je nachdem die Zuordnung auf dem ersten Hyperboloid innerhalb der Schaar mit nicht reellen, oder mit reellen Tangenten begonnen wird.

Von den vier Seiten jedes Vierseits aus Linien $g$ schneiden je nur zwei die Curve reell, so dass von jeder achtpunktigen Gruppe nur ein Quadrupel reell erscheint, mit zwei Punkten des einen und zwei Punkten des andern Astes; die Tangenten in ihnen bestimmen die eine, die Verbindungslinien die drei andern Flächen einer Vierergruppe. Die Regelflächen $R^{(4)}$ der Linien $g$ sind also alle drei reell, aber jede mit nur einem

reellen Mantel und nur die eine mit einem reellen Paare von Doppelgeraden auf diesen.

Die beiden verschiedenen Raumcurven $R_4$ sind durch ihr gemeinsames Bild eindeutig punktweise auf einander bezogen, und die für die Projection einer Durchdringung mit vier reellen Kegeln abgeleiteten Beziehungen, insbesondere die sämmtlichen Steiner'schen Involutionen gehen somit ohne Weiteres auf die neue Durchdringung mit vier imaginären Kegeln über. Alle Realitätsverhältnisse bleiben somit im Bilde beider Durchdringungen dieselben; sie führen aber mit verschiedenen Lagen des Durchstosspunktes $S_t^c$ der Centrumstangente auf dem unendlichen Aste oder auf dem Oval zu verschiedenen Auffassungen und Auslegungen der Raumverhältnisse, so dass der eine Fall durch den andern mit erledigt wird und wir uns damit begnügen können, diese Uebertragung für denjenigen der Viererinvolution ausgeführt zu haben.

11. Zwischen beiden Fällen einer Durchdringung mit vier reellen und nicht reellen Kegelflächen steht derjenige der Eindringung mit zwei reellen und zwei nicht reellen Kegeln. Seien Taf. III Fig. 1 $M_1 L_1$ und $M_2 L_2$ die beiden reellen Kegel mit dem Durchstosspunkte $S_{12}$ der Geraden $M_1 M_2$ oder $g_1$ als Richtung der Normale zur Centrale $c$ beider Spurkreise, so entsteht als Bild der Eindringung eine eintheilige, circulare Curve dritter Ordnung, wenn die Tangentenpaare der Spurkreise aus $S_{12}$ sich trennen (D. G. Bd. II-p. 156 ff.). Die Centrale $c$ ist dann die in der Bildebene liegende Gegenkante $g_2'$ und die auf ihr gelegenen Kegelspitzen $M_3$ und $M_4$ sind die Doppelelemente der elliptischen Involution $AA'$, $BB'$ ihrer Schnittpunktepaare mit $L_1$ und $L_2$. Auch diese im Sinne möglichster Vereinfachung angelegte Disposition enthält keinerlei specialisirende Bestimmungen bezüglich der folgenden, für jede eintheilige Curve dritter Ordnung gültigen Betrachtungen.

Jedes Paar der elliptischen Ebeneninvolution an einer der beiden reellen Tetraederkanten trifft die $R_4$ in vier reellen Punkten der einen und vier nicht reellen der andern Ebene, so dass wieder von jeder achtpunktigen Gruppe nur vier reell sind, jedoch nicht so, dass sie ein Quadrupel bilden. Jede

Gruppe von F.-Punkten für den Vierschluss besteht jetzt aus einem reellen und einem nicht reellen Paare; die Gruppe der vier Punkte $M$ im Bilde speciell aus dem Schnittpunkte der Gegenkanten $g_1' g_2'$, und dem Punkte $S_i^c$ als dem reellen Paare. Dieses bestimmt die Spurkreise $S$ und $S^c$ der beiden reellen zur Gruppe gehörenden Hyperboloide, und ihre Tangenten auf dem Kreise $S^c$ den einen, ihre Verbindungslinie auf dem Kreise $S$ den zweiten reellen Punkt $F$ ihrer Gruppe. Dabei ist es leicht, aus der Disposition zu erkennen, dass die Pole $P$ der Involutionen an beiden Punkten $F$ im Punkte $S_{12}$ liegen, und für beide Involutionen die Doppelstrahlen somit nach den Schnittpunkten der Spurkreise $S$ und $S^c$ resp. mit der Centrale derselben gehen; so dass aus jedem Punkte der Curve zwei reelle und zwei nicht reelle Tangenten an diese möglich sind.

Wieder sind die Involutionen am Punkte $S_i^c$ bestimmt durch die Tangenten nach den Punkten $M_i'$, aber nur die Combination der beiden reellen und nicht reellen zu je einem Paare ergiebt eine reelle Involution, mit $S_{12}$ als Pol und mit den Geraden aus $S_i^c$ nach den Schnittpunkten des Kreises $S^c$ mit der Centrale, als den einzig reellen Spuren $s_v^{(4)}$ der projicirenden Tangentialebenen an zwei Flächen $V^{(4)}$. Von den sich selbst entsprechenden Flächen sind also zwei reell, die eine hyperbolisch, die andere elliptisch; die eine mit einem reellen Paare von Punkten $F_v^{(4)}$, den Diagonalpunkten des Bildvierecks der reellen Scheitel der Curve; die andere mit einem nicht reellen solchen, in Uebereinstimmung mit der Anschauung des einzigen reellen Paares von Linien $g$ des Hyperboloids $H^c$, welches die Tangente im Centrum trifft. Von den Regelflächen $R^{(4)}$ ist nur die eine reell, mit zwei reellen Mänteln und Doppelgeraden.

Ganz nach Analogie mit dem Falle der zweitheiligen Curve gestaltet sich der Aufbau aller Involutionen für eine Zahl $n$ gleich einer Potenz von 2 aus derjenigen des Vierschlusses. Nach den an dieser bemerkten Realitätsverhältnissen können wir sagen, dass die Zahl der reellen Punkte jeder Gruppe halb so gross ist, wie in der entsprechenden Gruppe auf der zweitheiligen Curve; was ebenso von den sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(2n)}$ gilt; von

den reellen derselben ist die eine Hälfte hyperbolisch, die andere elliptisch.

12. Sind Taf. III Fig. 2 beide Kegelflächen $M_1 L_1$ und $M_2 L_2$ in Berührung, für einen Punkt $M_3$, so ist dieser als Schnittpunkt der in der gemeinsamen Tangentialebene gelegenen Erzeugenden ein Doppelpunkt der Curve $R_4$ und bestimmt im Bilde die Spur $L_3$ des uneigentlich doppeltprojicirenden Kegels, dessen Spitze er ist. Das Bild der Raumcurve ist demnach eine rationale Curve dritter Ordnung, circular und mit eigentlichem Knoten oder isolirtem Doppelpunkte, je nachdem die gemeinsame Tangentialebene der beiden Kegel dem dritten aus $M_3$ in reellen oder nicht reellen Erzeugenden begegnet (D. G. Bd. II p. 119). Liegt der Durchstosspunkt $S_{12}$ auf der gemeinsamen Tangente von $L_1$ und $L_2$ unendlich fern, und ist $M_1'$ ein Punkt der zweiten Tangente aus $S_{12}$ an $L_2$, so liegt im Raume das Centrum in der Polarebene $P_2$, deren Spur die Polare von $S_{12}$ bezüglich $L_2$ ist, und welche gleichzeitig das Bild der Gegenkante $g_2'$ durch $M_3'$ darstellt. Die Ebeneninvolution an der Kante $M_1 M_2$ ist parabolisch, und eine achtpunktige Gruppe besteht immer aus dem Doppelpunkte, seinen beiden unendlich benachbarten, und aus vier Punkten einer beliebigen Ebene durch $M_1 M_2$ mit einer Spur $h$ durch $S_{12}$. Diese letztern werden verbunden durch ein Paar von Linien $g$, den Erzeugenden der einzigen Regelfläche $R^{(4)}$, welche übrig bleibt, mit zwei reellen Mänteln, zwei Doppelgeraden und einem dreifachen Punkte in $M_3$.

Jene vier Punkte sind zwei Paare $F$ und $F'$ von F.-Punkten für den Vierschluss, deren Tangenten räumlich das eine, und deren Verbindungslinien $g$ das andere Hyperboloid einer Gruppe bestimmen. Jedesmal ist der Kegel aus $M_3$ als ein Paar von Flächen für jede dieser Gruppen aufzufassen: die Involution des Vierschlusses ist also quadratisch.

Aus jedem Punkte $F$ gehen zwei Tangenten an die $C_3$; die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte $N$ bestimmt den andern Punkt $F$ des Paares und ist das eine Doppelelement der quadratischen Strahleninvolution an diesem, dessen anderes stets nach dem Doppelpunkte $M_3'$ geht, welcher auch das

Paar der Doppelpunkte der Involution auf der Curve selbst darstellt, welche in diesem Falle auftreten.

Für die Involution am Punkte $S_i^c$ folgt, dass der Strahl nach $M_3'$ das eine Doppelelement $s_v^{(4)}$ vorstellt, während das andere nach dem zweiten Schnittpunkte der Polare von $S_{12}$ beziehentlich des Kreises $S^c$ geht. Der Kegel $M_3 L_3$ stellt demnach nicht nur zwei Regelflächen $R^{(4)}$, sondern auch eine sich selbst entsprechende Fläche $V^{(4)}$ dar; die andere Fläche $V^{(4)}$ ist elliptisch, wie in Fig. 2, oder hyperbolisch, je nachdem der Doppelpunkt ein eigentlicher Knoten oder ein isolirter Punkt ist. Im ersten Falle sind zwei, im andern vier Scheitel $S_i$ der $R_4$ reell, welche durch ihre Verbindungsgeraden ein gegeschlossenes Vierseit der Fläche $V^{(4)}$ geben[1]).

Nach der Ableitung aller folgenden F.-Punktegruppen mit der Methode des fortgesetzten Tangentenziehens geht die Ordnung jeder Involution durch Multiplication mit 2 aus derjenigen der vorhergehenden hervor, so dass die allgemeine Involution für $2n = 2 \cdot 2^k$ von der Ordnung $2^k$ ist.

Durch die Tangentialebene der Kante $M_1 M_2$, welche nicht durch $M_3$ geht, werden aus jeder Fläche $V^{(2m)}$ zwei Flächen $V^{(4m)}$ abgeleitet. Die Anzahl der sich selbst entsprechenden Flächen mit geschlossenen Polygonen von $2.2^k$ Seiten ist somit $2^{k-1}$, dazu treten die Doppelelemente aller Involutionen niedrigerer Ordnung, sowie jedesmal der als Paar zählende Kegel $M_3 L_3$ hinzu. Ausgehend von der Art der Fläche $V^{(4)}$, sind die Realitätsverhältnisse für die Curve mit Knoten wie mit isolirtem Doppelpunkte für alle sich selbst entsprechenden Flächen leicht festzustellen; für den Fall der Disposition in Fig. 2 kann keine dieser Flächen hyperbolisch sein.

Hat die Raumcurve $R_4$ einen Rückkehrpunkt, so geht von jedem Punkte ihres Curvenbildes nach eine einzige Tangente an dieses; von einer Involution kann also jetzt nicht mehr die Rede sein.

---

1) Da die Raumcurve $R_4$ vom Schnittpunkte der Tetraederkante durch $M_3$ mit der Fläche $V^{(4)}$ als Curve vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten projicirt wird, so folgt daraus, dass wenn alle drei derselben reell sind, nothwendig einer ein isolirter Doppelpunkt ist.

13. a) Haben im Weitern Taf. IV, Fig. 1 beide Kegel die Erzeugende $M_1 M_2$ oder $l$ mit einander gemein, so besteht die Durchdringung nebst dieser Geraden noch aus einer Raumcurve dritter Ordnung $R_3$. Die Tangentialebenen längs $l$ an beide Kegelflächen sind die beiden eigentlichen Tetraederebenen; die Punkte $M_1 M_2$ auf $l$ die beiden eigentlichen Ecken; die Gerade $l$ selbst stellt die Vereinigung sämmtlicher sechs zusammenfallenden Kanten dar; Punkt- und Ebeneinvolution an ihr für das zweite Paar von Ecken und Ebenen sind unbestimmt (D. G. Bd. II. p. 156). Da die Gerade $l$ selbst als Theil der $R_4$ auftritt, so ist zu erwarten, dass die auf ihr liegenden Paare der Involution der Doppelpunkte $M_1$ und $M_2$ bereits für das Problem des Vierschlusses die Bedeutung von F.-Punktepaaren haben werden.

Das Bild der $R_3$ erscheint nach der Disposition der Fig. 1 als Kreis $K'$ und irgend ein Paar der Ebeneninvolution an $l$ von den Spuren $h_1$ und $h_2$ bestimmt auf $K'$ zwei Punkte $N$, deren Tangenten sich nothwendig auf $l'$ begegnen müssen, und deren Verbindungslinie daher stets durch den Schnittpunkt $S$ der Kreistangenten in $M_1'$ und $M_2'$ geht. Jede Fläche des Büschels besitzt demnach zwei Tangenten mit einer Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte, die Erzeugende desjenigen Hyperboloids $R^{(2)}$ durch die Raumcurve dritter Ordnung ist, das durch die Tangenten derselben in $M_1$ und $M_2$ bestimmt ist, und welche mit ihr zur selben Schaar gehören. Der Schnittpunkt der Tangenten in den $N$ und ihre Verbindungslinie bestimmen auf $l'$ ein Paar der schon bekannten Involution der Doppelpunkte $M_1'$ und $M_2'$, und das Curvenbild entspringt aus der projectivischen Zuordnung der Polarinvolutionen für $K'$ an diesen, also mit einem Doppelelemente als gemeinschaftlich entsprechend.

Die Involution des Vierschlusses besteht also sowohl auf der Geraden $l$ als auf der Raumcurve $R_3$ aus einer quadratischen Involution; mit den gemeinsamen Punkten $M_1$ und $M_2$ beider Träger als den Doppelelementen.

Die Verbindung irgend eines Paares von Punkten $F$ der Involution auf $l$ mit einem Paare $N$ derjenigen auf der Raum-

curve $R_3$ liefert ein geschlossenes Vierseit auf zwei Flächen, und zwar für die projectivische Zuordnung derjenigen Schaaren, welche Punkte der Geraden mit Punkten der Raumcurve verbinden; die Verbindung irgend zweier Paare der $R_3$ giebt dagegen ein Vierseit auf zwei Flächen für diejenigen ihrer Schaaren, zu denen $l$ selbst gehört, also mit zwei reellen Tangenten und mit $l$ als Doppelelement, das in beiden Involutionen sich selbst entspricht. Weil für jede Flächengruppe jedes Mal beide Schaaren derselben Art in projectivischer Verbindung stehen, so kann es keine eigentlichen Vierschlussflächen $V^{(4)}$ geben.

In der That kann im Bilde nur für einen Strahl nach $M_1'$ oder $M_2'$ ein Paar von F.-Punkten mit $S_t^c$ in einer geraden Linie liegen, so dass wirklich die beiden Kegelflächen als die einzigen Flächen $V^{(4)}$ anzusehen sind. Das Hyperboloid $R^{(2)}$ mit der Spur $S^R$ durch die Durchstosspunkte $S$ der Tangenten in $M_1$ und $M_2$ und der Verbindungsgeraden des Punktepaares $N$, repräsentirt dabei die einzige auf die zweite Ordnung reducirte Regelfläche $R^{(4)}$ des allgemeinen Falles.

Die Berührungspunkte $N_1$ der Tangenten aus dem zweiten F.-Punkte $F$ haben eine Verbindungslinie durch den ersten; zwei Punkte $N$ und $N_1$ sind F.-Punkte für den Achtschluss; ihre Verbindungslinien schneiden sich paarweise auf $l'$ in zwei neuen Punkten $F_1$, welche mit den Punkten $F$ ein vierpunktiges Element der Involution vierter Ordnung bilden. Jene geschlossenen Vierseite aus Linien $NN_1$ sind Bilder von Erzeugenden einer Regelfläche $R^{(4)}$ von der Ordnung vier, mit der Raumcurve $R_3$ als Doppelcurve und umhüllen einen Kegelschnitt, welcher mit dem Kreise $K'$ in doppelter Berührung ist für $l'$ als Berührungssehne. Die Diagonalen aller Vierseite erfüllen die Polareninvolution am Pole $L$ von $l$ bezüglich des Kreises, und die Schnittpunkte von $K'$ mit $l'$ sind die einzigen Doppelelemente beider Punktinvolutionen vierter Ordnung. Ihre Verbindungsgeraden mit $S_t^c$ stellen somit die Spuren $s_v^{(8)}$ der in ein Paar vereinigten projicirenden Tangentialebenen an die uneigentlichen Flächen $V^{(8)}$ vor, die durch die beiden Kegel aus $M_1$ und $M_2$ vertreten werden.

Man gelangt auch hier durch Fortsetzung des Verfahrens zu den Involutionen für den allgemeinen Fall von der Ordnung $2^k$, mit Sehnengruppe ihrer Elemente, welche $2^{k-2}$ Kegelschnitte, sämmtlich in doppelter Berührung mit dem Kreise $K'$ für $l'$ als Berührungssehne, umhüllen. Sie sind ihrer Entstehung nach specielle Projectivitäten in der Form Möbius'scher Involutionen[1]), mit dem Paare von Schnittpunkten zwischen $K'$ und $l'$ als dem einzigen Paare ihrer Doppelelemente, so dass die Flächen $V^{(2n)}$ also durch das Paar der Kegelflächen vertreten werden.

13. b) Aus der doppelten Berührung der beiden Kegelflächen $M_1 L_1$ und $M_2 L_2$ entspringt eine weitere Degenerationsform, eine $R_4$ mit zwei Doppelpunkten, oder ein Paar von Kegelschnitten.

Auf Taf. IV Fig. 2 ist diese doppelte Berührung dadurch hergestellt, dass beide Leitcurven $L_1$ und $L_2$ am Punkte $S_{12}$ der Geraden $M_1 M_2$ dieselbe Polarinvolution (Rechtwinkelinvolution) besitzen. Die beiden gemeinsamen Tangentialebenen sind nicht reell, die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte der Durchdringung also ebenfalls imaginär. Das Tetraeder hat zwei Ecken in $M_1$ und $M_2$ mit zwei Gegenebenen, welche sich in der Schnittlinie beider Durchdringungsebenen begegnen. Auf dieser sind die gemeinsamen Schnittpunkte die Doppelpunkte oder Kegelspitzen $M_3 M_4$; ihre Gegenebenen enthalten sie also resp. Irgend ein Paar der Ebeneninvolution an $M_1 M_2$, welche identisch ist mit der gemeinsamen Polarinvolution der zugehörigen Kegelflächen, bestimmt eine achtpunktige Gruppe, von deren Punkten sich vier auf den Kegelschnitt $K'$ und vier auf das Bild $p'$ des andern Kegelschnittes projiciren (D. G. Bd. II. p. 162 f.). Sie theilen sich in zwei Gruppen $N$ und $N'$, deren Tangenten für diejenigen auf $K'$ sich paarweise in Punkten $F$ auf $p'$ schneiden.

Die Verbindungslinien zweier Punkte $N$ und zweier Punkte $N'$ gehen dabei stets durch ein festes Punktepaar $F_v^{(4)}$ auf $K'$, in einer Geraden nach dem unendlich fernen Punkt $S_t^c$ von $p'$, der Spur der durch das Centrum gehenden Tangentialebene der Fläche $V^{(4)}$;

1) Möbius: Leipziger Berichte Bd. VII. pag. 123 f.

welche mit dem Paare der Durchdringungsebenen die Doppelelemente der quadratischen Viererinvolution bildet.

Die Anschauung zeigt, dass sich im Bilde genau der vorhergehende Fall wiederholt, nur dass jetzt der Punkt $S_t^c$ auf der Geraden $p'$ liegt, und daher für die quadratische Involution bereits eine eigentliche Fläche $V^{(4)}$ aufgetreten ist. Die Kegelschnitte der Sehnengruppen führen in diesem Falle durch ihre Tangentenpaare aus $S_t^c$ zu den Spuren der projicirenden Tangentialebenen an wirkliche $2n$-Schlussflächen, deren Anzahl also $2^{k-1}$ ist.

Das Ebenenpaar der Durchdringung umfasst auch die Vorstellung der Regelflächen $R^{(4)}$ und $R^{(8)}$ des allgemeinen Falles; auf die Modification der Resultate desselben für noch speciellere Formen des Zerfallens soll nicht mehr eingegangen werden; nach dem Vorausgegangenen sind dieselben leicht allgemein zu übersehen.

14. Aus der Betrachtung der Realitätsverhältnisse bezüglich der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(4)}$ des Vierschlusses gewinnen wir eine einfache Uebersicht der Erzeugnisse, welche aus der projectivischen Verbindung der quadratischen Involutionen beider Regelschaaren einer Fläche zweiten Grades hervorgehen können. Durch die Natur der Zuordnung ist bereits festgesetzt, dass einem reellen Doppelelement der einen Involution ein reelles oder imaginäres Paar der andern entsprechen kann, dass dagegen einem nicht reellen Doppelelement stets ein nicht reelles Paar der andern Involution entsprechen muss. Ist:

1) die Fläche hyperbolisch, so entsteht

a) Eine zweitheilige Raumcurve $R_4$ mit vier reellen doppeltprojicirenden Kegeln, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, mit jedesmal reellem entsprechendem Paar der andern Involution; oder wenn beide Involutionen elliptisch sind.

b) Eine zweitheilige Curve $R_4$ mit vier nicht reellen Kegeln, wenn die eine Involution hyperbolisch ist, mit reellem entsprechendem Paar in der andern elliptischen Involution.

c) Eine eintheilige Curve $R_4$ mit zwei reellen Kegeln, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, mit je einem reellen und einem nicht reellen entsprechenden Paare der andern Involution.

d) Die unicursale Raumcurve $R_4$ mit isolirtem Doppelpunkt, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, mit je einem Doppelelement in beiden als entsprechend und mit reellen entsprechenden Paaren bezüglich der andern Doppelelemente.

e) Eine Raumcurve dritter Ordnung in Verbindung mit einer reell oder nicht reell schneidenden Bisecante, aus einer parabolischen Involution, mit reellem oder nicht reellem entsprechendem Paar ihrer vereinigten Doppelelemente in der andern Involution.

f) Ein Paar von Kegelschnitten mit reellen Schnittpunkten und zwei nicht reellen Kegeln, wenn in beiden hyperbolischen Involutionen die Doppelelemente sich entsprechen; und mit nicht reellen Schnittpunkten und zwei reellen Kegeln, wenn beide Involutionen sich entsprechende nicht reelle Doppelelemente haben.

g) Ein Kegelschnitt und ein Linienpaar, wenn beide Involutionen parabolisch sind. Ist

2) die Fläche elliptisch, so entstehen durch projectivische Verbindung der Involutionen ihrer nicht reellen Regelschaaren die Fälle (a) und (c), dazu

h) Eine unicursale Raumcurve $R_4$ mit eigentlichem Doppelpunkt bei einem entsprechenden Doppelelement in beiden Involutionen.

i) Ein Paar von Kegelschnitten mit reellen Schnittpunkten und zwei reellen Kegelflächen bei beiden Doppelelementen als entsprechend.

## B. Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$-Schlusses für $n = 3^{k_1}$ und $n = 2^k . 3^{k_1}$.

Die Einfachheit in der Behandlung der Steiner'schen Polygone für alle Fälle, wo $n$ gleich einer Potenz von 2 ist, hat ihren Grund darin, dass unmittelbar mit der Construction der Durchdringungscurve alle Gruppen von Punkten auf ihr gegeben sind, welche in der Projection F.-Punkte für den Vierschluss sein können, und in der einfachen Art der Ableitung von Involutionsgruppen höherer Ordnung aus diesen. Die Seiten jedes Polygons auf einer sich selbst entsprechenden oder Doppelfläche sind Verbindungsgerade zwischen Punkten zweier Gruppen $P$ und $P'$ der zugehörigen Punktinvolution der Curve, und wenn wir die Construction derselben für den Vierschluss auch ohne die Kenntniss der Flächen $V^{(4)}$ ebenso einfach durchführen konnten, so hängt dies an der Bedeutung des Quadrupels für die Involution und für die Raumcurve. In der Folge haben wir uns zunächst mit dem Steiner'schen Sechsschluss zu beschäftigen, und da die Doppelflächen ein analoges Verhalten ihren Involutionen gegenüber zeigen, welches gestattet, diese besonders einfach zu übersehen: so wird es im Sinne constructiver Vereinfachung liegen, gleich anfangs das Augenmerk auf die sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(6)}$ zu richten, die aus ihren Involutionseigenschaften gegenüber dem Poltetraeder leicht erkannt werden müssen.

### IV. Construction der Flächen $V^{(6)}$ und ihre Bedeutung für das Problem.

15. Wir führen die Betrachtung an der Durchdringungscurve mit vier reellen Kegeln weiter. Fassen wir, wie zu Anfang des vorigen Abschnittes, ein degenerirtes unter den Steiner'schen Sechsseiten in's Auge, so besteht dieses aus zwei Doppelseiten $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$, die sich in einem Punkte der $R_4$ schneiden, und aus zwei Tangenten $t_1$ und $t_2$, welche dasselbe schliessen, und mit jenen Seiten paarweise auf derselben Fläche liegen. Projiciren wir das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ aus dem Mittelpunkte $M_i$ eines Kegels zum zweiten Male nach

Punkten $A_1'$, $A_2'$, $A_3'$ der Curve, so schneidet die neue Tangente $t_2'$ die Seite $A_1 A_3$, also sind $A_2' A_3$ und $A_2' A_1$ Erzeugende einer Fläche des Büschels; aus analogen Gründen $A_1' A_2$ und $A_1' A_3$ Erzeugende derselben Fläche. Zieht man jetzt noch $A_3' A_1$ und $A_3' A_2$, so haben wir ein geschlossenes Sechsseit von Erzeugenden einer einzigen Fläche, woraus sofort folgt, dass auch die Tangente der dritten Ecke $A_3$ mit $A_1 A_2$ einer Fläche angehört, so dass die drei Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ sich untereinander analog verhalten.

Wir wollen von drei solchen Punkten $A_i$ sagen, dass sie ein Dreieck bilden, oder Dreieckspunkte sind. Ihre Ebene begegnet der Raumcurve in einem weitern Punkte $S$, welcher offenbar der gemeinsame Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen der Curve in den Punkten $A_i$ ist. Wenn somit die Schmiegungsebenen in zwei Punkten der $R_4$ sich auf dieser begegnen, so geht die Schmiegungsebene im letzten Schnittpunkte der Ebene dieser drei ebenfalls durch diesen Punkt. Die Verbindungsgeraden des Punktes $S$ mit den drei Punkten $A_i$ bestimmen drei Flächen, welche paarweise so combinirt werden können, dass sie vier Mal ein degenerirtes Steiner'sches Sechsseit liefern. Die Construction dieser Dreiecke hängt mit der Construction der Sechsschlussflächen $V^{(6)}$ auf's Engste zusammen, und wir wenden uns daher direct zur Bestimmung dieser Flächen.

Auf jeder derselben sind die Regelschaaren in projectivische Involutionen dritter Ordnung geordnet, welche nebst der $R_4$ noch einen Kegelschnitt erzeugen, der nothwendig ihr Schnitt mit einer Tetraederebene $P_i$ sein muss. Betrachten wir insbesondere eines derjenigen Polygone, welche einen Scheitel der $R_4$ zur Ecke haben, so muss noch ein zweiter Scheitel der Curve Ecke sein, und das mittlere Seitenpaar aus Linien $g$ bestehen; oder das Polygon ist ein degenerirtes, der zweite Scheitel fällt mit dem ersten zusammen, und das Polygon schliesst sich mit zwei Tangenten der Fläche.

So oft also die achtpunktige Gruppe, welche von den Tangentialebenen in einem Scheitel an die Flächen einer Vierergruppe auf der Curve bestimmt wird, mit einer der

vier Gruppen von acht Berührungspunkten identisch ist, **haben** wir eine Gruppe von vier Sechsschlussflächen, und wir bemerken bereits, dass diese als Vierergruppen auftreten **werden.** Das Entsprechen zwischen den achtpunktigen Gruppen auf der $R_4$ ist ein ein-vierdeutiges, und da für die Gruppen der vier Kegelflächen das Zusammenfallen entsprechender Gruppen evident ist, so haben wir sechszehn Flächen $V^{(6)}$ in vier Gruppen zu vier zu erwarten.

Wir erweisen dies näher durch Construction und benutzen dazu die Disposition der Taf. V für den Fall des Centrums in einem Scheitel $S_1$, oder bei bekanntem Wendepunkt $M_4'$ oder $J_1$ der Curve im Bilde. Da es sich um Ebenenbüschel handelt mit der Tangente im Scheitel $S_1$ als Axe, so ersetzen wir diese durch ihre Spurenbüschel, und weil im Weitern die Behandlung mit dem Spurkreise $L_1$ günstiger ist, als diejenige mit dem Kreise $L_4$, so verlegen wir die Construction an einen der vier andern reellen Scheitel $S_2$, deren Tangenten Erzeugende des Kegels $M_1 L_1$ sind.

Offenbar genügt es, von den vier Ebenen nach einer achtpunktigen Gruppe jeweilen nur eine zu betrachten, und von den vier Flächen einer Gruppe nur diejenige, die durch sie als Tangentialebene bestimmt ist. An diese gehen dann aus den drei Kanten des Tetraeders durch $M_1$ drei Paare von Tangentialebenen; durchläuft die Ebene das Büschel um die Scheiteltangente, so beschreiben diese Paare die Involutionen an den Tetraederkanten, diese und jene in projectivischer Zuordnung. Wir haben somit am Durchstosspunkte $S$ auf $L_1$, wo die Tangente in $S_2$ der Bildebene begegnet, ein Büschel von Spuren; um die Durchstosspunkte $S_{12}, S_{13}, S_{14}$ aber je eine dazu projectivische Strahleninvolution.

Die Zuordnung wird bestimmt durch die Tangentialebenen an drei Flächen, etwa der drei Kegel aus $M_2, M_3$ und $M_4$; wählen wir dazu die Involution am Punkte $S_{12}$, so ist der Strahl $SS_{12}$ dem Büschel und der Involution gemeinsam und entsprechend; das Erzeugniss somit ein Kegelschnitt $K^*$ mit der zweiten Tangente aus $S_{12}$ an $L_2$ als Tangente in diesem Punkte. Er geht durch die beiden andern Träger $S_{13}$ und $S_{14}$ der Involu-

tionen mit Tangenten in ihnen nach dem Punkte $S$, da diese Strahlen im Büschel den Doppelelementen in der Involution entsprechen. Der Kegelschnitt $K^*$ ist durch diese drei Punkte nebst Tangenten vollständig bestimmt, und steht mit dem Spurkreise $L_1$ in der Beziehung, dass jeder der beiden Kegelschnitte unendlich viele Tripel harmonischer Pole des andern enthält. Daraus, und weil der Tangente im Punkte $S$ selbst ein nicht reelles Paar der Involution entspricht, folgt, dass der Kegelschnitt $K^*$ den Kreis $L_1$ in nur zwei reellen Punkten $U_1$ und $U_2$ treffen kann.

Man bemerkt, dass ebenso durch die zweiten Tangenten in den Punkten $S_{12}$, $S_{13}$, $S_{14}$ noch drei weitere Kegelschnitte $K^*$ entstehen, entsprechend den Combinationen der Involution an $S_{12}$ mit den Büscheln an den Durchstosspunkten $S$ der Tangenten in den drei weitern Scheiteln $S_2$ der $R_4$; sie können aber nur zu Schnittpunkten $U_i$ führen, welche mit den schon bekannten auf Strahlen durch die Scheitel $S_{ik}$ liegen, nnd welche somit zu denselben Punktegruppen auf der Raumcurve führen; jeder der vier Kegelschnitte $K^*$ wird dabei für jede Involution in Verbindung mit einem Büschel dreimal erhalten. Der Punkt $U_1$ ergiebt eine reelle achtpunktige Gruppe von Punkten $K$ der $R_4$, der Punkt $U_2$ eine nicht reelle, aber mit Punkten paarweise in reellen Ebenen durch den Scheitel $S_2$ gelegen; die beiden nicht reellen Schnittpunkte führen zu imaginären Punktegruppen und wir schliessen:

Von den vier Vierergruppen der Flächen $V^{(6)}$ bestehen zwei aus hyperbolischen, resp. aus reellen elliptischen und zwei aus nicht reellen Flächen.

Die Tangentialebenen im Centrum an diese Flächen führen zu vier neuen achtpunktigen Gruppen, von denen wir die der reellen Gruppe der $K$ entsprechende mit $J$ bezeichnen wollen. Das Centrum ist ein Scheitel $S_1$, und weil die Geraden $S_1 J$ und $S_2 K$ sich als Erzeugende auf $V^{(6)}$ schneiden, so schneiden sich auch $JK$ und $S_1 S_2$, d. h. die Geraden $JK$ sind Erzeugende einer Fläche $V^{(4)}$. Die Paare von Quadrupeln $J$ und $K$ stehen somit in der Beziehung, wie die Quadrupel $M$ und $N$ der frühern Betrachtung, und wir können

daher mittelst einer der Involutionen $\mathfrak{P}_i^{(2)}$ zu jedem Quadrupel $K$ das entsprechende $J$ bestimmen. Wählen wir als solche etwa die Ebeneninvolution an der Kante $M_1 M_4$, also mit $s^{P_2}$ und $s^{P_3}$ in ihrem Spurenbüschel an $S_{14}$ als dem einen, und den Tangenten in $M_1'$ und im Schnitt von $L_4$ mit $s^{P_1}$ als dem andern Paar, oder mit $P_h$ als Pol im Hülfskreise $H$, so bestimmen die entsprechenden zu den zwei Paaren von Strahlen nach den Punkten $U_1$ und $U_2$ auf $L_1$ in dieser Involution zwei weitere Paare reeller Strahlen an $S_{14}$, welche $L_4$ in Punkten $U_1^*$ und $U_2^*$ zweier neuen Vierecke schneiden, welche jetzt die Durchstosspunkte $S_{14}$, $S_{24}$, $S_{34}$ zu Diagonalpunkten haben, und nach welchen die Gruppen reeller Spuren der projicirenden Tangentialebenen an die beiden reellen Gruppen der $V^{(6)}$ gehen; ebenso könnten die Spuren $s_v^{(6)}$ der nicht reellen Gruppen durch analoge Transformation der nicht reellen Schnittpunkte von $K^*$ und $L_1$ bestimmt werden.

Für jede der vier Gruppen von Flächen $V^{(6)}$ giebt es eine, in welcher das Polygon mit dem Centrum als Ecke ein degenerirtes ist, mit den Tangenten in je zwei von den acht Punkten $J$ sich schliessend, d. h. mit Schmiegungsebenen in diesen Punkten durch das Centrum; also mit zwei Ecken, deren Bilder als Wendepunkte der $C_3$ erscheinen. Wir bezeichnen diese beiden für die Gruppe der acht reellen $J$ mit $J_2$ und $J_3$; nach der Beziehung zwischen den $J$ und $K$ sind die erstern im Bilde die Schnittpunkte der Strahlen zwischen den $S_2$ und $K$, diese führen also ebenfalls zu den Punkten $J_2$ und $J_3$.

Betrachten wir nun auf der durch die projicirende Ebene dieser Punkte als Tangentialebene bestimmten Fläche $V^{(6)}$ ein Polygon mit zwei Scheiteln $S_2$ und vier Punkten $K$ als Ecken, so liegen diese paarweise in drei Strahlen durch die Ecke $M_4$, und die Seiten des Polygons schneiden sich paarweise in der Gegenebene $P_4$; zu der Fläche $V^{(6)}$ einer Gruppe zu vier wird in dieser Weise für alle ihre Sechsseite ein bestimmter Punkt $M_i$ und eine bestimmte Gegenebene $P_i$ des Tetraeders zugeordnet, und man kann deshalb die sechszehn Flächen $V^{(6)}$ auch in Bezug auf ein solches Paar in Gruppen zu vier zusammenfassen.

Die sechs noch möglichen Verbindungslinien zwischen

den sechs Ecken des Polygons bilden die Seiten zweier Dreiecke von schon besprochener Eigenschaft, dass die Tangente in jeder Ecke mit der Gegenseite auf der nämlichen Fläche liegt. Denn durch eine beliebige Ecke $S_2$ gehen beispielsweise zwei Erzeugende von $V^{(6)}$ nach zwei Ecken $K$, die Verbindungslinie dieser Punkte liegt aber mit zwei weitern Punkten $K$ und dem Punkte $M_4$ in einer Ebene, wird also noch von der Verbindungslinie der zwei andern Ecken, sagen wir $K'$, geschnitten, so dass die Tangente in $S_2$ und $K'K'$ von derselben dritten Geraden geschnitten werden, also auf derselben Fläche liegen, und zur gleichen Schaar gehören. Genau so zeigt man jetzt, dass die Tangente in jedem Punkte $K'$ und die Gerade $S_2 K'$ dieselbe Fläche ergeben, so dass wir wirklich zu zwei Dreiecken $K' S_2 K'$ und $K S_2 K$ von der genannten Art gelangen.

Der Beweis bleibt unverändert bestehen für eine allgemeine Lage des Polygons auf der Fläche, und gilt für jede der drei andern Flächen $V^{(6)}$ der Vierergruppe und ihr zugehöriges Paar $M_i$, $P_i$. Wir können daher allgemein sagen:

Jedes Polygon einer Sechsschlussfläche $V^{(6)}$ setzt sich aus zwei für die entsprechende Ecke $M_i$ perspectivisch liegender Dreiecke zusammen, so dass in der Projection die Tangente jeder Ecke sich mit der Gegenseite im Dreieck auf der $C_3$ begegnet.

16. Ist eines dieser Dreiecke bekannt, so ist es auch jedesmal die entsprechende Gruppe von vier Flächen $V^{(6)}$, und sind damit alle übrigen derselben Art bestimmt. Für die Gruppe der hyperbolischen $V^{(6)}$ sind die Dreiecke alle ganz reell; für die Gruppe der elliptischen Flächen ist je eine Ecke und ihre Ebene reell; für die nicht reellen $V^{(6)}$ sind sie ganz imaginär. Die Dreiecke derselben Art bilden durch die Gesammtheit ihrer Seiten je eine Regelfläche mit der Raumcurve $R_4$ als Doppelcurve, und mit doppelt umschriebenen Developpablen aus den Punkten $M_i$, welche die Umrisskegel einer Vierergruppe von Flächen $V^{(6)}$ sind: sie sind also von der achten Ordnung $R^{(8)}$. Ist jeder der Umrisskegel, $U_3$ z. B. für die Ecke $M_3$, bekannt als Spur des Tangentialkegels an jede der zur Ecke

$M_3$ gehörenden Flächen $V^{(6)}$, so sind damit alle Dreiecke bestimmt.

Für jede der vier Regelflächen $R^{(8)}$ bildet die Gesammtheit der Dreiecksebenen, aus welchen sie entstanden, ihre dreifach umschriebene Developpable, und weil jede Fläche des Büschels acht Tangentialebenen mit jeder gemein hat, so schliessen wir sie als von der vierten Classe, oder je als gemeinsame Developpable von vier Kegelschnitten in den Ebenen $P_i$. Von den Flächen $R^{(8)}$ ist nur diejenige aus der Gruppe der hyperbolischen $V^{(6)}$ reell, diejenige aus der elliptischen ist imaginär, wohl aber mit reeller dreifach umschriebener Developpablen.

Ausser der Ebene derjenigen Dreiecke, für welche das Projectionscentrum selbst die eine Ecke ist, gehen durch diese noch drei Tangentialebenen an jede Developpable. Sie begegnen der Raumcurve in neun Punkten von zwölf Dreiecken, deren Ebenen sämmtlich das Centrum als vierten Schnittpunkt besitzen, d. h. mit neun projicirenden Schmiegungsebenen der Raumcurve in ihren Ecken. Für das Bild der Curve folgt demnach:

Die neun Wendepunkte der ebenen Curve dritter Ordnung liegen zu dreien in zwölf Geraden $h$; durch jeden Wendepunkt gehen vier derselben, weil jede Gerade, welche zwei solche verbindet, einen dritten Wendepunkt enthalten muss.

Wir haben die vier Geraden $h$ durch den Wendepunkt $J_1$ bereits construirt; sie entspringen mit derjenigen, welche die beiden reellen Wendepunkte $J_2$ und $J_3$ verbindet, aus den vier Schnittpunkten $U_i^*$, und wir wissen von ihnen bereits, dass zwei reell, aber nur die eine reell schneidend, und zwei nicht reell sind, somit von den Wendepunkten selbst nur drei reell erscheinen. Dieselben Verhältnisse müssen in Bezug auf die beiden andern reellen Punkte $J_2$ und $J_3$ stattfinden; durch jeden derselben muss noch eine reelle Gerade $h$ gehen, welche wir sofort bestimmen werden, so dass von den zwölf Geraden $h$ vier reell und acht nicht reell sind.

Fasst man diejenigen Tangentialebenen, welche räumlich an dieselbe Developpable vierter Classe gelegt sind, in eine Gruppe zusammen, so erhält man ihre Spuren oder die Linien $h$

in vier Systeme zu dreien geordnet. Jedes System umfasst alle neun Wendepunkte: das erste System enthält die drei reellen Wendepunkte auf der einen, die sechs nicht reellen zu dreien auf zwei nicht reellen Linien $h$; das zweite System umfasst die drei weitern reellen Geraden $h$ mit je einem reellen und zwei nicht reellen Wendepunkten; die beiden andern Systeme bestehen aus je drei nicht reellen Linien $h$ mit jeder Seite durch einen der reellen Wendepunkte.

Man kann aber sofort eine zweite Zusammenfassung vornehmen, so geordnet, dass wieder vier Systeme entstehen, von denen jedes eine reelle und zwei nicht reelle Gerade $h$ enthält, entsprechend der räumlichen Zusammenfassung der Tangentialebenen an die Developpablen in Gruppen zu vier durch die projicirenden Kanten des einzig reellen Dreiecks. Das erste System bleibt bei dieser Anordnung bestehen, jedes der drei andern Systeme enthält eine reelle Gerade $h$ durch einen reellen und zwei nicht reelle Wendepunkte, nebst zwei nicht reellen Geraden durch je einen der beiden andern reellen und zwei nicht reelle Wendepunkte.

Wir wissen ferner, dass die Punkte, welche die Ebenen eines Quadrupels noch aus der $R_4$ schneiden, die Schnittpunkte der Schmiegungsebenen in jenen sind; somit bestimmen die neun Punkte, deren Schmiegungsebenen durch das Centrum gehen, neun Tetraeder ihrer Quadrupel, in welchen ihre Gegenebene projicirend ist. Die drei Punkte $J$, welche im Bilde einen Wendepunkt zum Quadrupel ergänzen, d. h. die Berührungspunkte der drei Tangenten aus einem Wendepunkte, liegen somit jedesmal in einer Geraden $i$. Man nennt sie die harmonische Polare, und aus der schon bemerkten Beziehung zwischen Pol und Harmonicalebene in Bezug auf das Tetraeder der $M_i$ lässt sich zeigen, dass sie gegenüber den Wendepunkten genaue Reciprocität befolgen, d. h. zwölf Mal zu dreien durch einen Punkt $H$ gehen.

Insbesondere liegen also die sechs reellen Punkte $J$, welche $J_2$ und $J_3$ zu einer achtpunktigen Gruppe ergänzen, zu dreien in zwei reellen Geraden $i_2$ und $i_3$; für den Punkt $J_1$ ist die Verbindungslinie der Kegelspitzen $M_i$ $(i = 1, 2, 3)$ diese Gerade $i_1$.

Die beiden Punkte $J_2$ und $J_3$ bestimmen die Spur einer Fläche $V^{(6)}$; sie sind somit — wenn wir der Entwicklung an dieser Stelle etwas vorgreifen — als F.-Punkte für den Steiner'schen Sechsschluss Träger von Strahleninvolutionen dritter Ordnung. Nebst der $C_3$ erzeugen diese noch einen Kegelschnitt, der in diesem Falle in eine Gerade durch die F.-Punkte und die Gerade $i_1$ zerfallen muss. Betrachten wir nun dasjenige Sechsseit aus $J_2$ und $J_3$, welches einen Wendepunkt als Ausgangsecke hat, so bestehen seine Seiten aus Linien $h$, und daher müssen sich zwei Gerade $h$ stets auf einer Linie $i$ schneiden; die reellen $h_2$ und $h_3$ durch $J_2$ und $J_3$ gehen somit nach den Schnittpunkten der reellen Geraden $h_1$ mit $i_3$ und $i_2$ resp. Sie bilden mit $h_1$ das reelle Dreieck $A_1 A_2 A_3$ des zweiten Systems in der ersten Anordnung der Linien $h$.

Die zwölf Geraden $h$ schneiden sich ausser den Wendepunkten noch in zwölf Punkten $A$; je vier Punkte $A$ müssen auf einer Geraden $i$ liegen, diese repräsentiren 56 Verbindungslinien zwischen ihnen; die zwölf weitern sind die Linien $h$, welche die $A$ paarweise enthalten; und dual für die harmonischen Polaren $i$ und ihre Schnittpunkte $H$.

17. Die vorliegende Curve dritter Ordnung kann als gemeinsame Hesse'sche Curve dreier Curven dritter Ordnung im Büschel ihrer Wendepunkte aufgefasst werden; dann sind die Projectionen der drei Regelflächen $R^{(4)}$ die Cayley'schen Curven für jene und die neun Geraden $i$ ihre gemeinsamen Tangenten. Die Tangente einer Cayleyschen Curve ist die Verbindungslinie zweier F.-Punkte für den Vierschluss, oder Projection einer Linie $g$. Dreht man um diese im Raume eine Ebene, so schneidet sie aus dem durch $g$ bestimmten Hyperboloid in jeder Lage eine Erzeugende heraus, welche $g$ im Punkte $A'$ schneiden mag, und welcher mit dem Berührungspunkte $A$ der Ebene und der $R^{(4)}$ jedesmal ein Paar einer Involution bestimmt. Die Doppelelemente dieser Involution auf $g$ sind die Schnittpunkte mit der $R_4$. Der Berührungspunkt einer Tangente der Cayleyschen Curve ist daher der vierte harmonische zum dritten

Schnittpunkte mit der $C_3$ in Bezug auf das Paar von F.-Punkten, die sie verbindet.

Die Hesse'sche Curve $C_3$ ist auch die Jacobi'sche Curve für das Netz der Polarkegelschnitte, welche die Punkte der Ebene mit einer der drei Curven dritter Ordnung bestimmen, und die Cayley'sche Curve die Enveloppe der degenerirten unter diesen. Jede Tangente der Cayley'schen Curve verbindet zwei entsprechende Punkte, wie die Punkte $K$ eines Quadrupels der Hesse'schen Curve, und schneidet sich im ergänzenden Punkte mit einer zweiten Verbindungslinie zweier Punkte $K$, welches Linienpaar als Polarkegelschnitt für einen Punkt der Hesse-schen Curve aufzufassen ist. Jeder der Punkte $K$ ist Pol für das noch durch den andern gehende Tangentenpaar der Cayley'schen Curve, dem jeweiligen Paare von Doppelelementen in der quadratischen Strahleninvolution des Vierschlusses. Diese beiden Geradenpaare bestimmen die Grundpunkte $G$ eines Büschels von Polarkegelschnitten, welches der Verbindungslinie der beiden Punkte $K$ als Ort der Pole für eine der drei Curven dritter Ordnung entspricht. Dem Punkte $J_2$ der Gerade $g'$ durch das Punktepaar $K$ in Taf. V entspricht das dritte Linienpaar dieses Büschels; dieses geht also durch den entsprechenden Punkt auf der Hesse'schen Curve zum Punkte $J_2$, oder ist die Tangente aus $J_2$ an diese, und die harmonische Polare $i_2$. Die Reihe der Pole auf der Verbindungslinie der Punkte $K$, und die Involution der Schnittpunktepaare der Kegelschnitte des Polarenbüschels ergeben als die drei gemeinsamen Elemente auf der betrachteten Geraden ihre Schnittpunkte mit der zugehörigen Curve dritter Ordnung.

Speciell für die Tangenten aus dem Wendepunkt $J_2$ an die Hesse'sche Curve mit dem Berührungspunkt $J$ ist diese Tangente und die harmonische Polare $i_2$ der Polarkegelschnitt für den Punkt $J_2$. Zum Punkte $J$ gehört ferner ein Polarkegelschnitt als Linienpaar durch den Wendepunkt, doppelt gelegt; alle Kegelschnitte des Polarenbüschels haben die Tangente nach $J$ in $J_2$ gemeinsam und alle drei Punkte der Curve dritter Ordnung fallen im Wendepunkte auf dieser zusammen. Somit haben die drei Curven dritter Ordnung, welche zu den

vorliegenden drei Cayley'schen Curven gehören, die Tangenten aus den Wendepunkten an ihre gemeinsame Hesse'sche Curve zu ihren Wendetangenten.

Die Cayley'sche Curve ist dritter Classe und sechster Ordnung, und aus der Construction des Berührungspunktes ihrer Tangenten folgt, dass diese und die Hesse'sche Curve sich in den neun Berührungspunkten $J$ selbst berühren, und also auch die zugehörigen Tangenten zu gemeinschaftlichen haben, sowie dass die neun harmonischen Polaren $i$ die neun gemeinsamen Rückkehrtangenten der drei Cayley'schen Curven sind, mit je dem vierten harmonischen eines Punktes $J$ in Bezug auf die beiden andern als Rückkehrpunkten. Die Punktinvolution des Vierschlusses besitzt demnach keine Doppelelemente, wie das auf dem Träger vom Geschlechte Eins zu erwarten ist.

Diese Betrachtungen knüpfen an eine räumliche Entwicklung der Polarentheorie der ebenen Curven dritter Ordnung; wir werden jedoch ihre bekannten Ergebnisse hier nicht weiter verfolgen, sondern kehren zu den Steiner'schen Secantenpolygonen der $R_4$ zurück.

## V. Die Sechsschlussinvolution.

18. Durch die Verbindungsgeraden des Projections-Centrums mit den neun Punkten der zwölf Dreiecke, welche sich als die zwölf Dreiecke der Linien $k$ durch die Wendepunkte projiciren, entstehen neun Flächen des Büschels und wir zeigen jetzt, dass alle acht übrigen durch jede unter ihnen eindeutig bestimmt sind, oder dass eine solche Gruppe ein Involutionselement bildet. Betrachten wir ein durch ein Quadrupel von Punkten $ABCD$ bestimmtes Tetraeder, so schneiden seine Ebenen die $R_4$ in Punkten $A'B'C'D'$ eines zweiten Quadrupels. Ist $D'$ der in der Ebene $ABC$ gelegene Punkt, so liegen $AD'$ und $BC$ auf derselben Fläche; ihre Ebene enthält also die Tangente in $A$ und die Punkte $A'B'C'D'$ sind somit die Schnittpunkte der Schmiegungsebenen in $ABCD$, wie schon bekannt. Die Tetraederebenen aller Quadrupel mit einer Ecke aus einer Gruppe von neun Punkten mit Schmie-

gungsebenen durch denselben Punkt $S$ schneiden sich also zu neun in Punkten des Quadrupels $S$.

Eine Flächengruppe zu neun ist dann bestimmt durch die Verbindungslinien eines Punktes $S$ mit seinen neun entsprechenden, oder durch die Tangenten in diesen; weil aber je drei Punkte eines Dreiecks mit $S$ in einer Ebene liegen, so gehören die 36 Verbindungslinien zwischen neun Punkten jeder Gruppe zu vieren mit der Tangente im letzten zur selben Schaar einer Fläche. Jede Gruppe von neun Flächen besteht dabei aus drei hyperbolischen, drei elliptischen und drei nicht reellen Flächen, welche somit ein Involutionselement einer Flächeninvolution neunter Ordnung im Büschel bilden.

Die reellen Punkte jeder Gruppe — für welche wir die Betrachtung zunächst weiter führen — sind Punkte eines Dreiecks, dessen Seiten den Umrisskegel aus $M_3$ an das zur Ecke $M_3$ gehörende Hyperboloid $V^{(6)}$ bestimmen. Dieser Umrisskegel ergiebt am einfachsten die jedesmal reellen drei Punkte jeder Gruppe, und es wird daher im Sinne einer Vereinfachung liegen, in der allgemeinen Disposition der Taf. VI die Spur $L_3$ des Kegels aus $M_3$, sowie den Umrisskegelschnitt $U_3$ als Spur jenes Kegels an $V^{(6)}$ aus derselben Spitze anzunehmen, und im Uebrigen die Disposition entsprechend zu vervollständigen.

Macht man insbesondere die Spur $s^{P_4}$ zur Centrale des Spurkreisbüschels, also $M_4'$ im Bilde unendlich fern, so wird $U_3$ mit $L_3$ concentrisch, hat diese Spur zur einen Axe und bestimmt mit $L_3$ zusammen das Umrisssystem des Flächenbüschels aus $M_3$; die Spur $L_1$ muss somit das durch $S_{13}$ gehende reelle Linienpaar dieses Systems berühren. Es ist leicht zu übersehen, dass über den Punkt $M_3'$ so verfügt werden kann, dass die Punkte der Raumcurve $R_4$, die den Ecken eines gegebenen, dem Umrisskegelschnitt $U_3$ umschriebenen Dreiecks entsprechen, im Bilde zu den drei reellen Wendepunkten gemacht werden können.

Wählen wir nach diesen Festsetzungen das Dreieck 123, welches $M_3'$ zur einen Ecke hat, oder das projicirende Dreieck,

wie wir sagen können, so gelangen wir zu den Punkten $N_1 N_2 N_3$ und $N_1' N_2' N_3'$ zweier für $M_3$ perspectivischer Dreiecke der Raumcurve. Sie sind die sechs Ecken eines Polygons auf dem zu $M_3$ und $U_3$ gehörenden Hyperboloid $V^{(6)}$, für welches das Centrum selbst eine Ecke ist. Die Gerade $N_2' N_3'$ geht also durch den Punkt $S_t^c$ des Bildes, und ist die Spur $s_v^{(6)}$ der projicirenden Tangentialebene von $V^{(6)}$. Die drei Punkte $N_1 N_2 N_3$ sind Punkte eines Dreiecks, die Tangenten in ihnen und die Gegenseiten begegnen sich somit in denselben Punkten der Curve, so dass in Taf. VI $F_1$ der Schnittpunkt der Tangente in $N_1$ mit $N_2 N_3$ ist u. s. f.

Ergänzen wir die Punkte $N_i$ zu einem Quadrupel, so entstehen drei neue Dreiecke $N_1 N_2 N_3$; denn diese sind durch zweimalige Projection des ersten aus zwei Ecken $M_i$ entstanden. Die Verbindungsgeraden innerhalb der vier Gruppen von je neun Punkten der B.-Quadrupel liegen aber alle auf denselben neun Flächen, welche durch die Tangenten bestimmt sind; ihre Zahl von $4 \cdot 36$ vertheilt sich zu 16 auf jede Fläche, und daher müssen die Verbindungslinien irgend eines Punktes $N_i$ mit irgend einem andern in derselben Gruppe zu neun, durch einen der drei Punkte $F_i$ gehen, und nach der eingeführten Bezeichnung erkennen wir diese Beziehung leicht in der Form: Zwei Punkte $N_i$ liegen mit einem Punkte $F_i$ in einer Geraden, wenn die Indices der drei Punkte alle gleich oder alle verschieden sind.

Zur Unterscheidung von den weitern Punkten $F$, die auftreten, wollen wir die drei soeben construirten Punkte $F_i$ mit Strich versehen, also in der Folge mit $F_i'$ bezeichnen. Fassen wir nun für die Punkte $F_1'$ und $F_2'$ als F.-Punkte, ausgehend von einem Punkte $N$ auf dem Ovale und unendlichen Ast resp., jedesmal den Linienzug $N_1 N_2 N_3$ als degenerirtes Sechsseit auf, mit zwei einfachen Seiten, den Tangenten in $N_1$ und $N_2$, mit zwei Doppelseiten durch $N_3$ und drei zusammenfallenden Eckenpaaren, so können wir die Tangente in $N_1$ und die Gerade $N_2 N_3$ doppelt gelegt, ebenso die Tangente in $N_2$ und die doppeltgedachte Seite $N_1 N_3$ je als Gruppe einer Strahleninvolution dritter Ordnung an den Punkten $F_1'$

und $F_2'$ ansehen; je zwei Mal für das Oval und den unendlichen Ast.

Ergänzt man dann die dem gemeinsamen Scheitelstrahl entsprechende Gruppe, so entspringt aus einer projectivischen Verbindung beider Involutionen, in der diese drei Gruppen sich entsprechen, eine Curve fünfter Ordnung $C_5$ mit Doppelpunkten in den Scheiteln $F_1'$ und $F_2'$. Unsere $C_3$ geht durch diese und die Doppelpunkte der $C_5$ in den zwei Punkten $N_3$, berührt sie in zwei Punkten $N_1$ und zwei Punkten $N_2$, hat also sechszehn Punkte mit ihr gemein. Die Curve dritter Ordnung, mit der wir uns beschäftigen, ist also ein Bestandtheil der $C_5$, als Rest bleibt ein Kegelschnitt $K$ durch die vier Doppelpunkte des Gesammterzeugnisses.

Die Strahlen je zweier entsprechender Gruppen schneiden sich in sechs Punkten der $C_3$ und drei Punkten von $K$. Diese bilden je ein Dreieck, dessen Seiten durch die drei Punkte $F_i'$ gehen, weil der Punkt $F_3'$ sich gegenüber $F_1'$ genau analog verhält wie $F_2'$, zufolge der Eigenschaft der Punkte $N_i$ als Dreieckspunkte. Die Involution am Punkte $F_1'$ bleibt also dieselbe, ob man sie mit derjenigen an $F_2'$ oder $F_3'$ combinirt; d. h.: Jedes Sechseck, das aus einer Combination zweier $F_i'$ entstanden ist, kann auch aus einer der zwei andern entstanden gedacht werden, so dass die sechs Ecken jedes auftretenden Sechsecks für alle drei Punkte $F_i'$ perspectivisch liegen.

Die Punkte $F_i'$ sind also F.-Punkte für eine unendliche Folge Steiner'scher Sechsseite und aus ihrer Gleichbedeutung für jedes der auftretenden Sechsecke folgt, dass die Tangenten der $C_3$ in den $F_i'$ und die Strahlen nach den beiden andern F.-Punkten je ein Element ihrer Strahleninvolution bilden müssen. Da nun die Tangenten in zwei Punkten $F_i'$ auf der $C_3$ sich nicht schneiden dürfen, so begegnen sich die Tangente in jedem Punkte $F_i'$ und die Verbindungslinie der beiden andern in je einem Punkte $T_i$ der Curve. Die Punkte $F_i'$ besitzen demnach die Eigenschaft von Dreieckspunkten; aus ihnen sind die $T_i$ genau so abgeleitet, wie die $F_i'$ aus den $N_i$, d. h. auch diese und die

$N_i$ sind F.-Punkte für den Sechsschluss, entsprechend der von Steiner gemachten Bemerkung über diese Punkte.

Die drei Punkte $F_i'$ sind die reellen einer Gruppe von neun; diese lassen sich aber für jeden der Punkte $F_i'$ in Paare zusammenfassen, welche mit ihm ein Dreieck von derselben Beschaffenheit bilden, wie die drei reellen. Diese Anordnung lässt sich von jedem der neun Punkte aus herstellen und wir schliessen, dass jede Combination zwischen zwei solchen ein Paar von F.-Punkten bildet, sowie, dass an jedem Punkte $F_i'$ nur vier verschiedene Strahleninvolutionen auftreten.

19. Es wiederholt sich demnach auch für diese Involution im Flächenbüschel die schon bekannte doppelte Entstehungsart derselben (Art. 3); ist diese durch Verbindung aller Punkte der $R_4$ mit derjenigen Gruppe von neun Punkten gedacht, für welche das Centrum der Punkt $S$ ist, so folgt für das Bild der Curve die Beziehung:

Die neun Wendepunkte der Curve dritter Ordnung bilden eine Gruppe von F.-Punkten für den Sechsschluss; ihre Verbindung mit einem beliebigen Punkte $P$ der Curve liefert wieder eine Gruppe von solchen, und diese Gruppe durchläuft die ganze Punktinvolution neunter Ordnung, wenn $P$ sich über die ganze Curve bewegt.

Auf jeder Fläche des Büschels liegen vier verschiedene Involutionen ihrer Regelschaar; je zwei Gruppen der Involution dritter Ordnung sind aber drei Paare einer der drei quadratischen Regelschaarinvolutionen der Fläche; wie die Herstellung der Involution dritter Ordnung aus denjenigen Gruppen, welche ein Doppelelement enthalten, ohne Weiteres lehrt. Die sechszehn Doppelelemente der vier verschiedenen Involutionen sind nach ihrer Bedeutung als Doppelseiten degenerirter Polygone Verbindungsgeraden der acht B.-Quadrupel der andern Flächen der Gruppe, und wir sehen somit wieder bestätigt, dass die neun B.-Quadrupel aus einem Quadrupel $S$ als den gemeinsamen Schnittpunkten ihrer Schmiegungsebenen entstehen.

Die sechszehn Doppelelemente sind Seiten von Dreiecken; in der Projection Verbindungslinien von F.-Punkten, und umhüllen als Bilder von vier Regelflächen $R^{(8)}$ vier Curven

sechster Classe. Aus jedem Punkte der $C_3$ gehen an jede vier Tangenten, welche zwei von dem betrachteten verschiedene F.-Punkte verbinden; vom Punkte $S_i^c$ speciell die vier schon bekannten Gruppen von Spuren $s_v^{(6)}$ der projicirenden Tangentialebenen der $V^{(6)}$; diese selbst sind die projicirenden Ebenen der sechszehn Doppelelemente für diejenigen Regelschaarinvolutionen, welche die Centrumstangente schneiden. In Taf. V sind zwei dieser Spuren für hyperbolische Flächen $V^{(6)}$ eingetragen.

Infolge der Zusammensetzung der Involutionen dritter Ordnung bilden die vier Doppelelemente zwei Paare einer der drei quadratischen Involutionen am betrachteten Scheitel. Die vier Punkte $N_i$ eines Quadrupels liegen demnach mit zwei Punkten $F_i$ auf einem Kegelschnitt, wenn alle drei Indices verschieden sind. Aus den 36 Combinationen zu zweien innerhalb der neun Punkte jeder Gruppe entspringen 36 Kegelschnitte; durch jeden F.-Punkt gehen acht und durch jedes Quadrupel von B.-Punkten sechszehn derselben.

## VI. Die Involutionsreihen der Zahlen $2^k$ und $3^{k_1}$ und ihre Transformation.

20. Bis jetzt sind von den Verbindungslinien zwischen den neun B.-Quadrupeln einer Flächengruppe nur je die 36 Geraden in Betracht gekommen, welche Punkte innerhalb jeder der vier Gruppen zu neun verbinden und welche mit den Tangenten in diesen zur selben Schaar gehören. Verbinden wir aber jetzt die Punkte verschiedener Gruppen von neun untereinander, so entsteht aus jeder Combination eine neue Gruppe von neun Flächen; aus je zwei solchen aber, welche alle vier Gruppen zusammen umfassen, je dieselbe Flächengruppe. Diese Verbindungslinien enthalten auch diejenigen zwischen den Punkten der einzelnen Quadrupel selbst, und die drei neu hinzutretenden Flächengruppen sind somit die durch die Linien $g$ aller neun Quadrupel bestimmten. Wir haben somit eine geschlossene Gruppe von 36 Flächen; sie bilden zugleich neun Gruppen der Viererinvolution und vier Gruppen der Involution neunter Ordnung.

In Taf. VI giebt es drei reelle Quadrupel $N_i$; die Verbindungslinien zweier solcher unter sich führen zu drei Gruppen von je drei neuen Punkten $F_i$, die mit den bereits gefundenen $F_i'$ je ein Quadrupel bilden; sie sind somit die Berührungspunkte der Tangenten aus den drei reellen Punkten $T_i$. Als Durchstosspunkte der projicirenden Strahlen auf den drei neuen Flächengruppen bilden sie drei Dreiecke $F_1 F_2 F_3$, deren Gegenseiten mit den Tangenten der Ecken sich somit in den Punkten $T_i$ begegnen, und sie liegen mit zwei Punkten $N_i$ in gerader Linie, wenn wieder alle drei Indices gleich oder ungleich sind. Die Figur zeigt sofort mit der Tangente in $N_1$ auf dem Oval oder dem unendlichen Aste als erster Seite den Linienzug $N_1 N_2 N_3 N_3 N_2 N_1$, der etwas hervorgehoben ist, als je ein degenerirtes Zwölfseit mit fünf Doppelseiten und sechs Doppelecken für $F_1'$ und $F_3$ als F.-Punkten.

Die an ihnen entstehenden Strahleninvolutionen sechster Ordnung mit den Gruppen, welche den gemeinsamen Scheitelstrahl als entsprechenden enthalten, ergeben als Erzeugniss ihrer projectivischen Verbindung eine Curve elfter Ordnung mit fünffachen Punkten in $F_1'$ und $F_3$. Die $C_3$ berührt diese in den Punkten $N_1$; geht durch ihre acht Doppelpunkte in $N_2$ und $N_3$ und die fünffachen Scheitel, ist somit mit 34 gemeinsamen Punkten nothwendig ein Bestandtheil von ihr. Aber die Tangente in $N_1$ und die doppeltgelegte Gerade $N_2 N_3$ bilden nicht nur zwei Gruppen der Involution dritter Ordnung, der wir schon am Punkte $F_1'$ begegnet, sondern auch drei Paare einer quadratischen Involution; ebenso bilden die drei Strahlen durch $F_3$ doppelt zu nehmen zwei Gruppen der Involution dritter Ordnung; mit $N_2 N_3$ als einem Doppelelement und $N_1 N_2$ als doppelt gedacht drei Paare einer quadratischen Involution des Vierschlusses. Diese Involution ist also auch hier die fundamentale; alle Doppelelemente treten in Paaren dieser auf, und das Erzeugniss zerfällt nebst der $C_3$ in zwei Curven vierter Ordnung $C_4$ mit Doppelpunkten in den Scheiteln; ihre Schnittpunkte unter sich und mit der $C_3$ bilden die 24 Doppelpunkte des Gesammtgebildes.

Durch Betrachtung der dem Scheitelstrahl entsprechenden

Gruppen liesse sich nun leicht beweisen, dass diejenigen Punkte, welche mit $F_1'$ F.-Punkte sind für den Zwölfschluss, die Berührungspunkte der Tangenten aus den $T_i$ sein müssen, wenn wir es nicht bereits wüssten.

Setzen wir an Stelle der drei reellen jedesmal die Gruppe der neun Punkte $F_i$, so bilden die 27 neuen Punkte $F_i$, welche mit den $F_i'$ dieselbe Tangentialgruppe $T_i$ besitzen, die Ergänzenden zu einer geschlossenen Gruppe von 36 Punkten in neun Gruppen zu vier und vier Gruppen zu neun. Jedes Paar von Punkten aus verschiedenen Untergruppen ist F.-Punktepaar für den Zwölfschluss. Aus der analogen Bildung der Gruppen $N_i$ wie derjenigen der $F_i$ folgt, dass auch diese eine Gruppe von 36 F.-Punkten bilden; es ist der bis jetzt stets (Art. 3) hervorgetretene Zusammenhang zwischen drei perspectivisch liegenden Gruppen in der besondern Art, dass zwei davon als in der Gruppe der $N_i$ vereinigt zu denken sind.

Jede Fläche lässt sich mit 24 andern combiniren und trägt zwölf verschiedene Involutionen sechster Ordnung, aber für jede von diesen sind unter den Doppelelementen diejenigen einer Involution dritter Ordnung und einer quadratischen enthalten, so dass nur 48 eigentliche solche auftreten. Die 36 B.-Quadrupel jeder Flächengruppe ordnen sich in vier Gruppen zu 36 Punkten, auf jeder Fläche liegen von den Verbindungslinien innerhalb jeder der vier Gruppen 70 Gerade; weil die 36 Flächen aber neun Gruppen zu vier, so sind unter diesen $9 \cdot 24$ oder $6 \cdot 36$ Linien $g$, und weil sie ebenso vier Gruppen zu neun, so sind von ihnen weitere sechszehn Doppelelemente der Involutionen dritter Ordnung. Es bleiben somit 48 Gerade für jede Fläche, welche Punkte aus verschiedenen Gruppen zu vier und neun verbinden und somit die eigentlichen Doppelelemente sind.

Acht Flächen einer Gruppe von neun schneiden durch ihre Linien $g$ von den B.-Quadrupeln 24 heraus, die zu ihrer Gruppe von 36 gehören und wir schliessen daraus, dass in Taf. V die Punkte $K$ F.-Punkte für den Zwölfschluss und dass ihre Verbindungsgeraden durch $S_i^c$ die Spuren $s_v^{(12)}$ der pro-

jicirenden Tangentialebenen an vier Flächen $V^{(12)}$ sind. Sie sind auch die Tangenten an eine von zwölf Curven sechster Classe, den Projectionen von ebenso vielen Regelflächen $R^{(8)}$, welche zu dreien aus jeder Gruppe von Flächen $V^{(6)}$ entspringen und die Umrisskegel der Flächen $V^{(12)}$ aus den Punkten $M_i$ zu doppeltumschriebenen Developpablen haben. An jede dieser Curven gehen aus $S_t^c$ noch vier Tangenten, die Spuren $s_v^{(12)}$ der das Centrum enthaltenden Tangentialebenen der Flächen $V^{(12)}$.

Die betrachtete Flächeninvolution von der Ordnung 36 ist die erste, deren Elemente gleichartig aus Elementen zweier verschiedener Flächeninvolutionen niedrigerer Ordnung zusammengesetzt sind. Sie kann als Erweiterung oder Transformation der Viererinvolution in derjenigen des Sechsschlusses und umgekehrt angesehen werden. Als die einfachere ist die Viererinvolution als fundamentale zu betrachten. Durch Ergänzung ihrer Doppelelemente in der andern Involution entstehen 54 solche, dazu kommen die 16 Doppelelemente der Involution neunter Ordnung. Unter den 54 sind aber die sechs Flächen $V^{(4)}$ enthalten; die 48 übrig bleibenden sind die zwölf Vierergruppen von Flächen $V^{(12)}$.

21. Wir gelangten zu einer Gruppe von 36 Flächen durch die Verbindungsgeraden sämmtlicher Punkte der B.-Quadrupel von neun Flächen. Verbinden wir jetzt die vier Gruppen von neun Quadrupeln einer Gruppe von 36 Flächen untereinander, so entstehen drei neue derartige Gruppen. Wir haben somit sechszehn Gruppen von neun Flächen; verbinden aber, um diese zu bilden, je die Quadrupel derselben Vierergruppe untereinander; daher sind jene $4 \cdot 36$ Flächen auch neun Gruppen zu sechszehn. Man bemerkt, dass bei Fortsetzung dieses Verfahrens jedes folgende Involutionselement durch Zufügung von drei Gruppen der vorhergehenden Involution zu einer solchen entstanden ist, so dass wir bei $k$-maliger Wiederholung $2^{2k}$ Gruppen von je neun Flächen haben; dass aber andererseits diese Flächengruppe ebenso aus neun Gruppen von je $2^{2k}$ Flächen besteht.

Die Transformation der Flächeninvolution neun-

ter Ordnung in derjenigen von der Ordnung $2^{2k}$ ergiebt demnach mit der umgekehrten Transformation dieselbe Involution von der Ordnung $(3 \cdot 2^k)^2$.

Die Erweiterung jeder neunpunktigen Gruppe in der Viererinvolution und die umgekehrte Erweiterung sind identisch; aber auch die Erweiterung jedes Dreiecks in einer vierpunktigen Gruppe und die Umkehrung sind identisch, d. h. vier solche Dreiecke sind auch drei Vierergruppen, wie räumlich ohne Weiteres evident.

Man vollzieht im Bilde diese Erweiterung, indem man von dem gegebenen Dreieck zum Tangentialdreieck übergeht, und aus diesem die Tangenten an die Curve legt; die drei Vierergruppen der Berührungspunkte besitzen sodann denselben Zusammenhang wie die drei Tangentialpunkte. Man erweitert das Ausgangsdreieck ferner zu einer Gruppe von $3 \cdot 16$ Punkten, indem man das Tangentialdreieck zu einer zwölfpunktigen Gruppe erweitert, und diese als neue Tangentialgruppe nimmt, woraus folgt, dass auch hier die drei sechszehnpunktigen Gruppen sechszehn Dreiecke bilden.

Nun bestimmen die neun Punkte einer Gruppe für jeden Punkt $F$ der $C_3$ viermal eine Involution dritter Ordnung, je durch drei Gruppen bestimmt. Halten wir unter diesen eine fest, etwa diejenige, die durch das Ausgangsdreieck bestimmt ist, so folgt aus der in Art. 9 entwickelten Zuordnung der sechszehn Strahlen in je vier vierstrahlige Gruppen, dass die Erweiterung der dreistrahligen Gruppe in der Strahleninvolution vierter Ordnung auf vier dreistrahlige Gruppen führt, und sofort allgemein, dass das Transformationsgesetz für die Flächeninvolutionen auch dasjenige der Regelschaarinvolutionen von den Ordnungen 3 und $2^k$ nach sich zieht und für diese gültig bleibt.

Sei nun $G_1$ eine Fläche, welche mit einer Hülfsfläche $H$ den Sechsschluss, $G_2$ eine solche, welche mit $H$ den $2 \cdot 2^k$-Schluss gestattet. Ein beliebiges Sechsseit des ersten Flächenpaares besitzt drei Seiten $\overline{AB_1}$ auf $G_1$ und drei Seiten $\overline{BA}$ auf $H$; vervollständigt man sodann für jede der Geraden $\overline{BA}$ das Polygon von $2 \cdot 2^k$ Seiten mit $3 \cdot 2^k$ der-

selben — sagen wir $\overline{AB}_2$ — auf $G_2$ und ebenso vielen auf $H$, so sind die letztern nicht nur drei Gruppen zu $2^k$, sondern auch $2^k$ Gruppen zu drei, und können demnach durch je drei Gerade $\overline{AB}_1$ auf $G_1$ zu einem Sechsseit ergänzt werden. Lässt man jetzt die Hülfsfläche weg, so bleibt ein geschlossener Linienzug von $2 \cdot 3 \cdot 2^k$ Seiten auf den Flächen $G_1$ und $G_2$ übrig.

Die Transformation der Involution des Sechsschlusses in derjenigen des $2 \cdot 2^k$-Schlusses ist somit die Involution für den $2 \cdot 3 \cdot 2^k$-Schluss, also äquivalent der Multiplication der Polygonseitenzahl mit $2^k$.

Dieses Resultat für das Curvenbild ausgesprochen giebt zwischen den Gruppen von F.-Punkten folgenden Zusammenhang:

Die Verbindungslinien zwischen den neun Punkten $F$ einer Gruppe von F.-Punkten für den Sechsschluss schneiden sich in ihrer Tangentialgruppe $T$ von derselben Art. Die Berührungspunkte ihrer Tangenten ergänzen $F$ zu einer Gruppe $F_1$ von 36 Punkten; zwei Punkte in dieser aus verschiedenen Gruppen von vier und neun sind F.-Punkte für den Zwölfschluss. Die Verbindungslinien dieser 27 Berührungspunkte begegnen der $C_3$ in den Berührungspunkten der Tangenten aus den $F$ und ergänzen die Gruppe $T$ zu einer solchen $T_1$ von 36 Punkten wie $F_1$. Die Berührungspunkte ihrer Tangenten ergänzen $F_1$ zu einer Gruppe von 144 Punkten; zwei ihrer Punkte aus verschiedenen Gruppen von 16 und 36 sind F.-Punkte für Polygone von 24 Seiten u. s. f.: Es ist die Ableitung aller Gruppen durch fortgesetztes Tangentenziehen von einer Anfangsgruppe von neun Punkten $T$ aus.

22. Wir haben die neun Punkte einer Gruppe räumlich aus einem Punkte $S$ als dem gemeinsamen Schnittpunkte ihrer Schmiegungsebenen abgeleitet; ergänzt man den Punkt $S$ selbst zu einer neunpunktigen Gruppe, so entstehen im Ganzen neun Gruppen $G_1 \ldots G_9$ und wir zeigen von diesen zunächst, dass sie genau unter sich den Zusammenhang befolgen, wie die neun Punkte jeder von ihnen selbst.

Von den 81 Punkten dieser Gruppe $G$ sind neun reell; sie bilden drei Dreiecke $A_i B_i C_i$ mit den drei reellen Punkten $S_i$ als je dem vierten Schnittpunkt ihrer Ebene mit der $R_4$. Die Tangenten und Seiten der ersten bestimmen drei Flächen einer Gruppe, ihre Erzeugenden durch die Ecken des Dreiecks von Punkten $B_i$ führen zu denjenigen eines Dreiecks aus Punkten $C_i$; die Ebenen derselben schneiden die Curve in einem Punkte $S_2$ und $S_3$ resp. und die Verbindungslinie $S_2 S_3$ ist dabei stets Erzeugende der Regelschaar, welche durch die Tangente in $S_1$ bestimmt ist. Rückt der Punkt $S_2$ in die zweite Ecke des durch $S_1$ bestimmten Dreiecks, so ist $S_3$ die dritte Ecke. Dies gilt genau so für die übrigen Dreiecke $S_i$ und somit lassen sich die neun Gruppen $G_i$ zwölf Mal in Gruppen zu drei so zusammenfassen, dass die Verbindungslinien je zweier mit den Tangenten und Verbindungslinien der dritten dieselbe Gruppe von neun Flächen ergeben. Auf jeder solchen Flächengruppe liegen die Verbindungslinien von vier Paaren der acht übrigen $G_i$; auf jeder Fläche somit 40 Gerade, nämlich vier Verbindungslinien zwischen Punkten derselben und 36 zwischen solchen verschiedener $G_i$.

Kehren wir nochmals zu den drei reellen Dreiecken zurück. Die 36 Verbindungslinien zwischen diesen neun Punkten liegen zu vier auf derselben Fläche. Diese enthält die Tangente in einem Punkte z. B. $A_1$, die Gerade $A_2 A_3$ und drei Verbindungslinien zwischen den $B_i$ und $C_i$. Verbindet man jetzt $A_1$ mit einem Punkte $B_i$ z. B. mit $B_1$, so ist dadurch eine zweite Fläche bestimmt, welche auch $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$, sowie die Tangente in einem Punkte $C_i$ und seine Gegenseite enthält. Es entsteht dadurch ein fortlaufender Linienzug — weil jeder Punkt mit Ausnahme von $A_1$ und eines Punktes $C_i$ zwei Mal verbunden wurde — der sich mit den Tangenten in diesen Punkten auf denselben Flächen schliesst; also ein degenerirtes Polygon von 18 Seiten. Die 36 Geraden setzen sich somit zu vier und vier in einen fortlaufenden Linienzug zusammen; für jede der sechs Combinationen, die man mit jeder der neun reellen Flächen vornehmen kann, bleiben die auf ihr liegenden vier Geraden dieselben.

Die betrachtete Flächeninvolution von der Ordnung $9^2$ ist somit diejenige des 18-Schlusses.

Jede Fläche lässt sich mit 72 andern combiniren; sie bestimmen auf ihr, wie wir soeben an den degenerirten Polygonen bemerkt, zu sechs dieselbe, also zwölf verschiedene Involutionen neunter Ordnung mit 192 Doppelelementen; weil aber jede Gruppe der Regelschaarinvolution sich aus drei Gruppen derjenigen dritter Ordnung zusammensetzt, so bleiben nur 144 eigentliche Doppelelemente; sie schneiden die $R_4$ in den 72 B.-Quadrupeln der mit der betrachteten combinirten Flächen.

Gemäss der Zusammensetzung jedes Elementes aus neun Gruppen zu neun gilt für die Flächeninvolution wieder das doppelte Gesetz ihrer Entstehung, und auch ihre Doppelelemente müssen aus denjenigen der Involution neunter Ordnung hervorgehen. Je eine Vierergruppe von Flächen $V^{(6)}$ und eine Kegelfläche bilden zusammen eine Gruppe von neun; der zugehörige Punkt $S$ ist ein Scheitel der Curve; zwei Punkte der Gruppe $S$ auf derselben Erzeugenden jenes Kegels ergeben aber paarweise vereinigte Gruppen von je neun Flächen, im Ganzen also — weil vier Gruppen von Flächen $V^{(6)}$ existiren — $4 \cdot 36$ Flächen $V^{(18)}$.

Die projicirenden Tangentialebenen an diese Flächen sind die projicirenden Ebenen nach den Doppelelementen für diejenigen Regelschaarinvolutionen, welche die Centrumstangente schneiden.

23. Fasst man nun eine der betrachteten Gruppen von 81 Punkten als Gruppe von Punkten $S$ auf, so gelangt man dadurch zu einer Punkt- und Flächeninvolution von der Ordnung $9^3$. Bezeichnen wir jetzt die Gruppen von 81 Punkten mit $G_i$, so besteht zwischen diesen neun Gruppen genau derselbe Zusammenhang wie vorhin. Drei derselben $G_1$, $G_2$, $G_3$ enthalten zusammen 27 reelle Punkte; die Verbindungslinien zwischen den neun Punkten der Gruppe $G_2$ mit derjenigen von $G_3$ liegen auf den neun reellen Flächen aus Tangenten und Verbindungsgeraden von $G_1$. Aus dieser Gruppe entspringen für jede Fläche vier Gerade, aus der Verbindung von $G_2$ mit $G_3$ je

neun weitere; es sind die dreizehn Geraden, welche von den Verbindungslinien zwischen 27 Punkten auf jeder der 27 Flächen liegen müssen. Jede der neun reellen Flächen der Gruppe $G_1$ lässt sich mit den 18 reellen der Gruppen $G_2$ und $G_3$ so verbinden, dass auf ihnen ein fortlaufender Linienzug von 13 Geraden der einen und 13 Geraden der andern Fläche entsteht, so dass die Tangenten im Anfangs- und Endpunkte ebenfalls den betrachteten Flächen angehören.

Wir haben ganz nach Analogie mit dem Vorausgegangenen ein degenerirtes Polygon von 54 Ecken und Seiten. Jede Fläche lässt sich mit $8 \cdot 9^2$ andern combiniren; welche 36 verschiedene Involutionen ihrer Regelschaaren hervorbringen. Von den $36 \cdot 52$ Doppelelementen sind $36 \cdot 16$ solche niedrigerer Involutionen; die übrig bleibenden eigentlichen schneiden die B.-Quadrupel der mit ihr combinirten Flächen aus. Sie bestimmen wieder für die die Centrumstangente schneidende Schaar die Tangentialebenen an die Doppelelemente $V^{(54)}$, welche sich auch direct aus den $V^{(18)}$ in Gruppen zu neun ableiten lassen.

Die Auffassung der Punktegruppen jeder derartigen Involution als Schnittpunktegruppe $S$ der folgenden ergiebt eine neue fortlaufende Involutionsreihe, deren Ordnungszahlen sich durch fortgesetzte Multiplication mit 9 aus einander ableiten. Die Elemente dieser Involutionen lassen sich stets in neun Gruppen $G_i$ der vorhergehenden zusammenfassen, mit Wiederholung der Beziehungen zwischen neun Punkten einer Gruppe selbst und der Eigenschaft, dass die Erzeugenden der durch sie bestimmten Flächengruppen sich zu geschlossenen Polygonen von $2 \cdot 3^{k_1}$ Seiten zusammenfügen, wenn die Ordnung der Involution selbst $3^{2k_1}$ ist.

Die Gruppen der $3^{2k_1}$ Punkte sind zwar mit den Gruppen von neun Punkten nicht unmittelbar gegeben; ihre Construction erfordert aber keine andern Mittel, als diejenigen für ihre Partialgruppen, so dass wir sagen können, dass mit der Bestimmung der Involution von F.-Punkten des Sechsschlusses auch diejenige für den $2 \cdot 3^{k_1}$-Schluss gegeben ist.

Kehren wir nochmals zur Involution des 18-Schlusses zu-

rück. Wenn wir in einer Gruppe von 81 Punkten dieser Involution drei Gruppen $G_i$ vom Zusammenhang eines Dreiecks herausgreifen, so bestimmen ihre gegenseitigen Verbindungslinien drei Flächengruppen zu neun. Ein Dreieck der ersten Gruppe bestimmt drei Flächen der Gruppe $G_1$, welche die Dreiecke der beiden andern einander paarweise zuordnen, so dass jedem Dreiecke von $G_1$ ein bestimmtes Dreieck von $G_2$ und $G_3$ entspricht. Durch diese Zuordnung entstehen auf jeder Fläche des Büschels drei verschiedene Involutionen neunter Ordnung; aber die Darstellung der neun Flächengruppen $G_i$ von der ersten aus ist selber viermal möglich, so dass im Bilde die 81 Punkte einer Gruppe $G$ mit jedem Punkte $F$ der Curve zwölf verschiedene Involutionen neunter Ordnung und von jeder neun Gruppen bestimmen.

Denkt man jetzt die acht weitern Gruppen von 81 Punkten zugefügt, welche ein Element der folgenden Involution bilden, so ordnet jede der zwölf Involutionen von vorhin die acht andern Gruppen drei Mal in Paare, so dass aus jeder bekannten Involution drei neue abgeleitet werden, und somit allgemein eine Gruppe von $3^{2k_1}$ Punkten $4 \cdot 3^{k_1-1}$ verschiedene Involutionen von der Ordnung $3^{k_1}$ durch je $3^{k_1}$ Gruppen bestimmt; und weil jeder Punkt $F$ mit $8 \cdot 3^{2(k_1-1)}$ andern combinirbar ist, so ergeben je $2 \cdot 3^{k_1-1}$ Punkte an $F$ dieselbe Involution; die Strahlengruppe jeder folgenden Involution setzt sich aus drei Gruppen der vorhergehenden zusammen.

Die fortgesetzte Verbindung der B.-Quadrupel leitet aus jeder Involution eine neue Involutions-Reihe ab, und in dem Aufbaue dieser Involutionen liegt zugleich die Einsicht in die Umkehrbarkeit der Transformation. Diese kann für jede Involution an der Gruppe der Punkte $S$ ausgeführt werden, und nach der soeben abgeleiteten Zusammensetzung der Regelschaarinvolutionen gilt das Gesetz der Umkehrbarkeit der Transformation auch für diese.

Die Transformation der Involution für den $2 \cdot 2^k$-Schluss in derjenigen für den $2 \cdot 3^{k_1}$-Schluss und ihre umgekehrte führen zur Involution des $2 \cdot 2^k \cdot 3^{k_1}$-Schlusses,

sie ist somit äquivalent einer Multiplication der Seitenzahl des Polygons mit $2^k$ resp. $3^{k_1}$.

Mittelst der beiden beliebig weit sich fortsetzenden Involutions-Reihen aus dem Vier- und Sechsschlusse resp. als fundamentalen Involutionen sind durch ihre Combinationen zu zweien alle diejenigen erhältlich, welche zu einer Zahl $n$ von der Form eines Productes aus den Primzahlpotenzen von 2 und 3 gehören. Ebenso lassen sich die Doppelelemente oder die sich selbst entsprechenden Flächen der zusammengesetzten Involution aus denjenigen der Partialinvolutionen direct ableiten. Jedesmal besteht eine Gruppe, welche eine Doppelfläche enthält, nur aus solchen; ist die Involution von ungerader Ordnung, so tritt jedesmal eine der vier Kegelflächen in einer derartigen Gruppe auf. Die Anzahl der eigentlichen sich selbst entsprechenden Flächen für $n = 2^k \cdot 3^{k_1}$ ist somit

$$n_v = 2 \cdot (2^2 - 1)(3^2 - 1) 2^{2(k-1)} \cdot 3^{2(k_1-1)}.$$

24. Wir sprechen diese Beziehungen, die ebenso gut räumlich weiter verfolgt werden könnten, für das Bild der Raumcurve aus, und geben den Zusammenhang der bis jetzt bekannten Punktinvolutionen der Curve dritter Ordnung für den Fall, dass die Ausgangsgruppe der zweiten Involutions-Reihe die Gruppe der Wendepunkte ist.

Weil jede Gruppe von neun F.-Punkten durch ihre sämmtlichen Verbindungslinien zu ihrer Tangentialgruppe von genau denselben Eigenschaften führt, so folgt zunächst, dass die Gruppe der neun Wendepunkte mit ihrer Tangentialgruppe identisch ist, und dass diese Punkte somit zu dreien in zwölf Geraden liegen müssen. Diese Eigenschaft ist aber die Ursache einer ganzen Reihe interessanter Erscheinungen, welche unter der Bezeichnung der merkwürdigen Punktsysteme von Clebsch bekannt sind.

Construiren wir nämlich die acht weitern Gruppen $G_i$, welche mit der Wendepunktsgruppe F.-Punkte sind, für den Achtzehnschluss, so fällt auch diese nothwendig mit ihrer Tangentialgruppe zusammen, und da alle Gruppen $G_i$ sich gegenseitig und unter einander gleichartig verhalten, so ist jede Gruppe $G_i$ ihre eigene Tangentialgruppe, oder jede be-

steht aus drei Dreiecken, deren Seiten die Tangenten der $C_3$ in den Ecken sind. Solcher geschlossener Tangentendreiseite giebt es demnach 24. Wir wollen mit Clebsch acht solche Punkte nebst ihren Verbindungslinien ein System nennen; die Tangente jedes Systempunktes geht dann noch durch einen Punkt des Systems, und je zwei Dreiecke sind perspectivisch für das dritte; durch jeden Punkt gehen demnach drei Gerade, welche noch zwei weitere Punkte des Systems enthalten.

Alle acht Systeme zusammen bilden mit den neun Wendepunkten ein neues System, so dass die Tangente in jedem Systemspunkte wieder einen Punkt desselben enthält, und die Verbindungslinien zweier Gruppen von neun sich in einer dritten schneiden. Durch jeden Punkt des Systems, der nicht Wendepunkt ist, gehen 39 Gerade, welche noch zwei Punkte desselben enthalten; durch jeden Wendepunkt gehen 36 nach Paaren von Systemspunkten, von denen keiner Wendepunkt ist.

Fasst man jetzt diese Gruppe von 81 Punkten als Gruppe $G_i$ und construirt wieder die acht weitern Ergänzungsgruppen zu einem Elemente der folgenden Involution, so hat man jetzt acht Systeme von 81 Punkten, mit genauer Wiederholung des vorigen Zusammenhanges, wenn man an Stelle der einzelnen Punkte Gruppen von je neun Punkten setzt.

Jede der acht Gruppen $G_i$ besteht aus drei Gruppen von 27 Punkten, wobei diese 27 drei Gruppen von neun Punkten bilden, so beschaffen, dass man durch sämmtliche Tangenten und Verbindungslinien der ersten zu Punkten der zweiten, durch ihre Tangenten und Verbindungslinien zur dritten und von dieser analog zur ersten zurückgelangt. In jeder Gruppe zu neun kommen, wenn sie überhaupt reell ist, drei reelle Punkte vor. Für diejenigen reellen, die zu einer Gruppe von 27 gehören, ist das Tangentialdreieck des ersten Dreiecks das zweite, sein Tangentialdreieck das dritte, das Tangentialdreieck des dritten wieder das erste Dreieck. Die neun reellen Punkte bilden demnach ein geschlossenes aus den neun Tangenten seiner Ecken bestehendes Tangentenneunseit. Solcher Polygone aus Tangenten giebt es im Ganzen 72; nur drei von ihnen sind reell.

Die 81 Punkte jedes Systems sind also so beschaffen, dass jeder Tangentialpunkt wieder ein Punkt des Systems ist und seine Tangente selbst einen weitern Punkt desselben enthält. Je zwei Gruppen zu 27, die sieh aus den Ecken geschlossener Tangentenneunseite zusammensetzen, sind für die dritte perspectivisch. Durch jeden Punkt gehen $\frac{81-3}{2}$ Gerade nach Paaren des Systems. Von den 1053 Geraden, welche drei Punkte verbinden, sind 324 solche, welche zwei Punkte aus derselben Gruppe von neun und 729 solche, welche drei Punkte aus drei verschiedenen solchen verbinden.

Die acht Gruppen können jetzt wieder zu einer einzigen vereinigt werden, und mit Ersetzung der bis jetzt betrachteten Gruppen durch allgemeine kann man diese Systeme folgendermassen zusammenfassen:

Es giebt ein System erster Art von $3^{2k_1}$ Punkten, welches alle neun Wendepunkte enthält; alle Punkte desselben ausser diesen haben die Eigenschaft, dass ihre Tangente noch einen Punkt des Systems enthält; durch jeden dieser Punkte gehen $\frac{3^{2k_1}-3}{2}$ Gerade nach Paaren von Systemspunkten. Im Ganzen giebt es $\frac{(3^{2k_1}-3)(3^{2k_1}-9)}{6}$ Gerade, welche drei Punkte des Systems enthalten. Dazu kommen durch jeden Wendepunkt $\frac{3^{2k_1}-1}{2}$ Gerade nach zwei Punkten des Systems.

Es giebt im Weitern acht Systeme zweiter Art, welche keinen Wendepunkt enthalten, und wieder enthält die Tangente jedes Punktes einen weitern Punkt des Systems. Durch jeden derselben gehen $\frac{3^{2k_1}-3}{2}$ Gerade, welche drei Punkte des Systems enthalten, die Zahl dieser Geraden ist $\frac{3^{2k_1}(3^{2k_1}-3)}{6}$. Jedes System besteht aus $3^{k_1}$ geschlossenen Tangentenpolygonen von $3^{k_1}$ Seiten und Ecken. Ihre Gesammtzahl ist $8 \cdot 3^{k_1}$. Die acht Systeme zweiter Art bilden zusammen mit demjenigen erster Art ein neues System der ersten Art von $3^{2(k_1+1)}$ Elementen.

25. Zu Systemen analoger Art gelangt man, wenn die Gruppe von $2^{2k}$ F.-Punkten von einem oder von allen drei Wendepunkten aus dargestellt wird.

Nehmen wir zunächst den ersten Fall. Diejenige der vier Untergruppen, welche den Wendepunkt enthält, ist die gemeinschaftliche Tangentialgruppe der drei andern, welche mit einander perspectivisch liegen, und ihre eigene Tangentialgruppe. Diese neun Systeme, welche so an jedem Wendepunkte entstehen, bilden zusammen ein neues System, und je drei Gruppen, welche aus drei Wendepunkten in gerader Linie entstanden sind, sind selbst perspectivisch.

Für die Viererinvolution folgt beispielsweise: Von den 351 Geraden zwischen den 27 Berührungspunkten $J$ der Tangenten aus den Wendepunkten enthalten 81 je drei Punkte $J$ und zählen dreifach; 108 je zwei Punkte $J$ und einen Wendepunkt. Unter diesen Geraden sind 54 Projectionen von Linien $g$, wovon 27 durch einen Wendepunkt gehen; 27 unter ihnen enthalten je drei Punkte $J$ oder sind die neun harmonischen Polaren $i$, die erstern 27 die aus den Wendepunkten gelegten Tangenten.

Die Erweiterung der Punktegruppen der Systeme beider Arten in der Involution des $2 \cdot 2^k$-Schlusses liefert keine neuen Tangentenpolygone, weil die neu hinzutretenden Gruppen mit den alten dieselbe Tangentialgruppe, d. h. diese selbst als solche besitzen; doch entstehen dadurch zwei neue Arten von Systemen, die sich folgendermassen kurz beschreiben lassen: Ist $m$ eine Zahl von der Form $2^k \cdot 3^{k_1}$, so entsteht aus dem Systeme erster Art ein neues mit $m^2$ Punkten, worunter die neun Wendepunkte; $\frac{m^2}{4}$ Punkte, die Wendepunkte inbegriffen, haben die Eigenschaft, dass ihre Tangente noch einen Punkt des Systems enthält, und dass sie selbst Schnittpunkte von vier Tangenten sind. Durch jeden Wendepunkt gehen $\frac{m^2-4}{2}$ Gerade nach Punktepaaren des Systems, von $\frac{m^2}{4} - 9$ andern Punkten aus je $\frac{m^2-6}{2}$, endlich von $\frac{3m^2}{4}$ Punkten aus

je $\frac{m^2-2}{2}$ Gerade, welche noch zwei Systemspunkte enthalten. Somit giebt es $\frac{m^4-3m^2+18}{6}$ Gerade mit drei Systemspunkten.

Dieses System umfasst die acht Systeme ohne Wendepunkte; von den $\frac{m^2}{4}$ Punkten eines solchen aus gehen wieder $\frac{m^2-6}{2}$ und von $\frac{3m^2}{4}$ solchen gehen $\frac{m^2-2}{2}$ Gerade aus, welche noch zwei Punkte des Systems enthalten, so dass die Gesammtzahl der Geraden mit drei Systemspunkten $\frac{m^2(m^2-3)}{6}$ ist. Es ist nur ein anderer Ausdruck dieser Beziehungen, wenn wir sagen:

Alle Punkte, welche mit einem Wendepunkte F.-Punkte sind für die Zahl $3m$ (wo $m$ zunächst die Form $2^k \cdot 3^{k_1}$ besitzt), haben die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie von zweien derselben einen dritten Punkt derselben Eigenschaft enthalten kann. Dieser kann aber auch ein Wendepunkt oder ein zu kleineren Zahlen $k$ und $k_1$ gehörender Punkt sein.

Oder: Zu allen Punkten, welche mit einem Wendepunkte F.-Punkte sind für die Zahl $3m$, gehören Punktegruppen, welche mit ihnen F.-Punkte sind für die Zahl $m$, die zu dreien in Geraden liegen können.

## VII. Modification für die Specialformen der Durchdringung.

26. Die abgeleiteten Beziehungen zwischen den beiden Involutions-Reihen bestehen im Bilde unverändert fort für die zweitheilige Raumcurve im Büschel mit vier nicht reellen Kegelflächen, nur mit anderer Interpretation der räumlichen Verhältnisse. Die neun Punkte einer Gruppe liegen je auf demselben Aste, mit dem vierten Schnittpunkte $S$ der Ebene ihrer Dreiecke auf dem andern; weil aber im Bilde das Tangentialdreieck jedes der zwölf Dreiecke auf dem unendlichen Aste liegt, so kann es keine reelle Seite eines solchen durch den Punkt $S_t^c$ geben, und analog für alle aus solchen Gruppen der Zahl $3^{k_1}$ zusammengesetzten Punktinvolutionen, d. h. die sich selbst entsprechenden Flächen der zweiten In-

volutions-Reihe können nicht mehr reell sein. In der That muss jede derartige Flächengruppe eine Kegelfläche, und muss das Erzeugniss ihrer Regelschaarinvolutionen einen in einer Tetraederebene $P_i$ gelegenen Kegelschnitt enthalten; sie können also nicht reell sein.

Hat die Raumcurve nur zwei reelle doppeltprojicirende Kegel, so bleiben die Realitätsverhältnisse der zweiten Involutions-Reihe fortbestehen; von den sich selbst entsprechenden Flächen werden jedesmal die Hälfte von den reellen der entsprechenden Zahl im Büschel mit vier reellen Kegeln imaginär, weil sie sich stets als Vierergruppen darstellen lassen.

Besitzt die Raumcurve in $M_3$ einen Doppelpunkt, so entspricht dem Büschel der Tangentialebenen am Scheitel $S_2$ der $R_4$ eine parabolische Involution von Tangentialebenen an der Kante $M_1 M_2$, und wir erhalten an Stelle des Kegels $K^*$ als Erzeugniss eine Ebene durch die Kante $M_1 M_3$. Sie schneidet den Kegel aus $M_1$ in einer zweiten Erzeugenden und bestimmt damit das einzige Paar von Flächen $V^{(6)}$, welche in diesem Falle auftreten. Von den neun Punkten jeder Gruppe bleiben also drei: die Flächeninvolution ist von der dritten Ordnung, also für den $2m$-Schluss ($m$ Bedeutung wie bis anhin) von der Ordnung $m$. Jeder Punkt kann mit $(2-1)(3-1)2^{k-1} \cdot 3^{k_1-1}$ andern combinirt werden; diese Zahl ist zugleich die Anzahl der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(2m)}$.

Im Falle der Curve mit eigentlichem Knoten, wie in Taf. III, Fig. 2, ist von den drei Punkten jeder Gruppe je nur einer reell, von jeder Flächengruppe also je nur eine hyperbolisch. Eine beliebige Ebene durch $M_1 M_2$, also von der Spur $h$ durch $S_{12}$, definirt als Tangentialebene eine bestimmte Fläche des Büschels. Sie begegnet der Raumcurve in vier Punkten mit den Bildern $F$ und $F'$, welche paarweise verbunden der $C_3$ in einem dritten Punkte begegnen, für welche die Verbindungslinie durch $S_i^c$ geht und die Spur der projicirenden Tangentialebene an die betrachtete Fläche ist. Als solche schneidet sie die Linie $h$ in einem Punkte der Spur $s^K$, welche ihrerseits durch den zweiten Schnittpunkt auf $L_1$ die

Spur $h^*$ der Ebene durch $M_1 M_2$ bestimmt, nach deren Schnittpunkten im Raume mit der $R_4$ die projicirenden Tangentialebenen der Flächen $V^{(6)}$ gehen. Ist $S_t^c$ der reelle Wendepunkt $J_1$, so enthält eine der beiden Spuren dieser Ebenen die beiden andern Wendepunkte $J_2$ und $J_3$. Nur im Falle der Curve mit isolirtem Doppelpunkte sind die $V^{(6)}$ hyperbolisch und alle drei Wendepunkte reell.

27. a) Für den Fall der Raumcurve dritter Ordnung und eine ihrer Doppelsekanten $l$ wird die Involution dritter Ordnung sehr übersichtlich gebildet durch die Berührungspunkte der Gruppen von je drei Schmiegungsebenen an die $R_3$ aus den Punkten $S$ der Geraden $l$. In der Projection entstehen Gruppen von je drei Punkten, specielle Pascalsechsecke auf dem Kreise $K'$, für welche sich die Tangenten in den Ecken mit den Gegenseiten auf Punkten der Geraden $l'$ schneiden, welche also die Pascallinie ist. Sie sind nur reell, wenn die Gerade $l'$ den Kreis nicht reell trifft, also $l$ eine imaginär schneidende Doppelsekante der $R_3$ ist. Auf $K'$ und $l'$ entstehen die Möbius'schen Involutionen dritter Ordnung, je zwei Gruppen derselben sind drei Paare der quadratischen Involution, der wir schon begegnet sind; ihre Doppelelemente sind sämmtlich durch das Schnittpunktepaar von $l'$ mit $K'$ dargestellt.

Die allgemeine Involution für den $2m$-Schluss ist von der Ordnung $m$; auch für diese stellen jene beiden Punkte die Gesammtheit der Doppelelemente dar, und weil der Punkt $S_t^c$ auf dem Kreise liegt, so werden auch für diese Involutionen die Doppelelemente oder Flächen $V^{(2m)}$ durch das Paar der doppeltprojicirenden Kegelflächen aus $M_1$ und $M_2$ vertreten.

27. b) Wir haben bei andern räumlichen Verhältnissen dieselben Beziehungen im Bilde der Degenerationsform in zwei Kegelschnitte. In Taf. IV, Fig. 2, haben wir am Punkte $S_{12}$ eine Strahleninvolution dritter Ordnung nach den Ecken aller Dreiecke, welche dem mit $L_1$ concentrischen Kreise $U_3$ um- und $L_1$ eingeschrieben sind, und welche im Spurbüschel an der Kante $M_1 M_2$ die cubische Involution bestimmen, deren Ebenen zu je vier Dreiecken $N_1 N_2 N_3$ im Bilde führen. Die

Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Pole $P'$ der Spur $p'$ der projicirenden Ebene der Durchdringung führt jedesmal auf ein zweites derartiges Dreieck, dessen Punkte mit einem der drei andern Paare von F.-Punkten für den Zwölfschluss bilden. Wieder ist die Involution des $2m$-Schlusses von der Ordnung $m$, aber weil jetzt der Punkt $S_i^c$ auf $p'$ (unendlich fern) liegt, so treten eigentliche $2m$-Schlussflächen auf.

In diesem wie im vorigen Falle umhüllen die Sehnen aller Punktegruppen zu $m$ auf dem Kegelschnitte $K'$ je $\frac{m-2}{2}$ Kegelschnitte; sie sind mit $K'$ die centrisch collinearen Umformungen des Systems concentrischer Kreise, welche von den Sehnen aller regulären $m$-Ecke des Kreises $L_1$ umhüllt werden: für $M_1'$ als Centrum, die Spur $s$ der Ebene des Durchdringungs-Kegelschnittes $K$ als Axe und die Spur $p'$ als einer Gegenaxe. Sie sind also sämmtlich in doppelter Berührung mit $K'$ für diese Gegenaxe als gemeinschaftlicher Berührungssehne.

Jeder Punkt kann mit $(2-1)(3-1)2^{k-1} \cdot 3^{k_1-1}$ andern Punkten als F.-Punkten für die Zahl $m$ combinirt werden; ebenso gross ist die Zahl der eigentlichen $2m$-Schlussflächen und die doppelte Anzahl aller Kegelschnitte, denen Polygone von $2m$ Seiten umschrieben sind und deren zu $p'$ parallele Tangenten die Spuren $s_v^{(2m)}$ der projicirenden Tangentialebenen an die Flächen $V^{(2m)}$ sind.

28. Bis dahin war die Untersuchung des Flächenbüschels geführt worden für ein Centrum auf der Grundcurve und somit für die allgemeine oder specielle Curve dritter Ordnung als Bild. Mit der allgemeinen Lage des Centrums im Raume erscheint die Raumcurve in der Projection als die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, oder vom Geschlechte Eins. Alle Flächeninvolutionen erscheinen als solche in einem Systeme einfach unendlich vieler, vierfach berührender Kegelschnitte des Umrisssystems, derart, dass je $m$ Tangenten des einen Kegelschnittes sich mit $m$ Tangenten eines andern in einer bestimmten Gruppe von $m^2$ solchen zu geschlossenen, der Curve vierter Ordnung eingeschriebenen, Polygonen von $2m$ Seiten zusammenfügen. Die sich selbst ent-

sprechenden Flächen $V^{(2m)}$ stellen sich dabei als Vereinigung zweier solcher Kegelschnitte dar, welche für sich allein Träger von solchen Polygonen sind. Einer der beiden Kegelschnitte eines Paares kann in eine Strahleninvolution $m^{ter}$ Ordnung an einem der Doppelpunkte übergehen, wenn die eine der betrachteten Flächen diejenige ist, welche das Centrum enthält; und beide Kegelschnitte ersetzen sich durch projectivische Strahleninvolutionen aus den Doppelpunkten der Curve vierter Ordnung, wenn insbesondere das Centrum auf einer sich selbst entsprechenden Fläche $V^{(2m)}$ gelegen ist. Demnach gilt der Steiner'sche Satz:

Wenn einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten als F.-Punkten ein einziges geschlossenes Polygon sich einschreiben lässt, so giebt es unendlich viele, und jeder Punkt der Curve ist Ausgangspunkt eines solchen.

Die Projection der Flächeninvolution in den Specialfällen ergiebt die analogen Beziehungen für die unicursale Curve vierter Ordnung, für die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt und Spitze, und für ein Paar von Kegelschnitten. Mit jeder speciellen Lage des Centrums ist ein Specialfall und eine Specialform der Curven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Null und Eins und der Tangentialinvolutionen ihres Kegelschnittsystems verbunden; für die Lage des Centrums in einer Kegelspitze $M_i$ erhalten wir die Lösung des Poncelet-schen Schliessungsproblems bei Kegelschnitten.

## VIII. Anwendung der Sechsschlussinvolution. — Osculationssysteme.

Die vorliegenden Betrachtungen beschränken sich auf die Aufstellung und die Construction der F.-Punktegruppen Steiner'scher Polygone, deren Seitenzahl sich aus Potenzen der Primzahlen Zwei und Drei zusammensetzen und den gegenseitigen Beziehungen solcher Gruppen. Bevor wir in der Entwicklung weiterschreiten, geben wir noch eine Anwendung, welche die Bedeutung der Involution des Sechsschlusses für die Curve dritter Ordnung hervortreten lässt.

29. Betrachten wir drei beliebige Punkte $A, B, C$ der Raumcurve $R_4$ und verbinden wir diese mit einem beliebigen vierten Punkte $D$ der $R_4$ durch die Erzeugenden $a$, $b$, $c$ dreier Hyperboloide, construiren wir dann die vierten Schnittpunkte $A', B', C'$ der drei Ebenen durch $D$ nach dem Dreiecke $ABC$, so dass $A'$ in $BCD$, $B'$ in $ACD$ und $C'$ in $ABD$ liegen, legen wir ferner durch diese neuen Punkte die Erzeugenden $a_1$, $b_1$, $c_1$ derselben Hyperboloide und derselben Schaar, so schneiden sich diese in einem neuen Punkte $D'$ der Curve und die Ebene $A'B'D'$ enthält den Punkt $C$, $A'C'D'$ den Punkt $B$ und $B'C'D'$ den Punkt $A$. Im Allgemeinen liegt $D'$ nicht in $ABC$ und $D$ nicht in $A'B'C'$. Es ist jedoch leicht zu bewerkstelligen, dass dies auch noch eintritt.

Wählen wir nämlich drei der Punkte, in welchen eine beliebige Ebene die $R_4$ schneidet, als Punkte $A$, $B$, $C$, den vierten als $D'$ und gehen wir mittelst vier Linien $g$ zu vier Punkten $A', B', C', D'$ über, so dass alle vier dasselbe Gegenkantenpaar im Poltetraeder schneiden, so sind $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander um- und eingeschriebene Tetraeder, und weil die Ausgangsebene $ABC$ ganz willkürlich war, offenbar allgemeinster Art. Je zwei Gerade mit denselben gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben liegen als Linien $g$ auf derselben Fläche.

Wir setzen für die folgende Betrachtung zwei Tetraeder von allgemeiner Lage, also $D$ nicht in $A'B'C'$ voraus. Legen wir nun um die Gerade $CD$ nach einem beweglichen Punkte $E$ der Curve die Ebenen, so schneiden diese jeweilen einen zweiten Punkt $E'$ aus dieser, und die Geraden $EE'$ erfüllen das durch $CD$ bestimmte Hyperboloid. Die Ebenen aus dem vierten Schnittpunkte $C'$ der Ebene $ABD$ nach diesen Geraden bilden also ein Büschel um die Kante $C'D'$. Nun bestimmen die vier Geraden $abce$ aus $D$ nach $ABCE$ für jeden Punkt $E$ ein Büschel von Kegelflächen zweiten Grades, für welches das Ebenenpaar $ABD$ und $CDE$ eine degenerirte Fläche ist. Jeder Kegel trifft die $R_4$ in einem Punktepaare $F$, $G$; die Linien $FG$ erfüllen für alle Kegelflächen eines Büschels je ein Hyperboloid, das offenbar die Gerade $C'E'$ enthält. Die Ebenen $EFG$ liegen daher in einem

Büschel, welches auch die Ebene $CEE'$ enthält, d. h. alle Ebenen gehen für jedes Büschel von Kegelflächen durch den Punkt $D'$. Wir sehen somit:

Legt man aus einem beliebigen Punkte $D$ der Raumcurve $R_4$ nach drei willkürlichen ihrer Punkte $ABC$ das Netz von Kegelflächen zweiter Ordnung, so schneidet jede derselben die Curve in drei weitern Punkten $EFG$, deren Ebene der Curve stets im nämlichen vierten Punkte $D'$ begegnen.

Durch den Punkt $D'$ gehen drei reelle und sechs nicht reelle Schmiegungsebenen der Raumcurve; in dem Netze der Kegelflächen giebt es demnach drei reelle und sechs nicht reelle Flächen $K$, welche die $R_4$ osculiren. Da die neun Osculationspunkte zu dreien mit dem Punkte $D'$ in zwölf Ebenen liegen, von denen vier reell und acht imaginär sind, welche sich in vier Systeme so gruppiren, dass jedes eine reelle und zwei nicht reelle enthält, so folgt:

Die drei Osculationserzeugenden dreier Kegel $K$ liegen mit den drei festen Strahlen $abc$ in einer Kegelfläche $K_1$ oder liegen im Netz; solcher Kegel $K_1$ giebt es zwölf; sie gruppiren sich in vier Systeme zu dreien, welche alle neun Osculationskanten enthalten; in jedem Systeme ist ein Kegel $K_1$ reell, die beiden andern sind imaginär.

Die neun Osculationspunkte sind durch den Punkt $D'$ allein bestimmt, sowie alle acht übrigen durch jeden neunten unter ihnen. Alle Veränderungen innerhalb der drei Punkte $ABC$, welche den Punkt $D'$ ungeändert lassen, lassen auch das System der neun Osculationspunkte ungeändert. Nehmen wir nun irgend eine Ebene dreier Punkte $EFG$ durch $D'$ und bestimmen das Netz von Kegelflächen aus $D$ durch diese, so schneidet jede derselben drei Punkte des Systems $ABC$ heraus; denn die durch $abc$ und $efg$ gegebenen Netze haben eine Kegelfläche gemein, diese bestimmt eine Ebene $ABC$ und damit den vierten Schnittpunkt $S$ aller übrigen Ebenen $ABC$. Wir haben also zwei Systeme von je zweifach unendlich vielen Punktetripeln $ABC$ und $EFG$, und die sechs pro-

jicirenden Strahlen nach irgend zwei solchen liegen stets in einer Kegelfläche zweiten Grades.

Das Oculationssystem bleibt somit ungeändert, wenn von den Kanten $a\,b\,c$ sich eine oder alle drei ändern, wenn aber zwei sich ändern, so kann die Ebene $ABC$ nicht mehr durch $S$ gehen und es ändert sich auch der Punkt $D'$. Da von den neun Osculationspunkten je drei in einer Ebene durch $D'$ liegen, so wird das System der $a\,b\,c$ auch herausgeschnitten von dem Netze der Kegelflächen, das durch drei der Osculationsstrahlen bestimmt ist und endlich, da die Schmiegungsebene in den Osculationspunkten durch $D'$ geht, als Schnittsystem aller sich nach einer Osculationskante osculirenden Kegelflächen.

Fassen wir die drei Ebenen aus einer Osculationskante nach drei Strahlen $abc$ als Kegelfläche dritter Ordnung auf, so enthält der zugehörige osculirende Kegel des Systems durch $abc$ sechs der gemeinschaftlichen neun Kanten des mit dem projicirenden Kegel $K_3$ bestimmten Büschels dritter Ordnung, und die drei übrigen Kanten, welche jene drei Ebenen noch aus dem Kegel $K_3$ schneiden, liegen daher in einer Ebene.

Jede Ebene des projicirenden Bündels führt also durch die Verbindungsebenen der drei Strahlen, nach welchen sie den projicirenden Kegel dritter Ordnung schneidet, mit einer der neun Osculationskanten zu drei Strahlen des Systems $a\,b\,c$ und umgekehrt.

Durch den Schnittpunkt $S$ gehen aber ebenfalls neun Schmiegungsebenen; es giebt daher durch je drei Osculationskanten des ersten Systems — wir bezeichnen seine drei reellen mit $r$, $s$, $t$ — neun Kegelflächen zweiter Ordnung, welche den Kegel dritter Ordnung osculiren nach einer Kante eines zweiten Systems von genau derselben Beschaffenheit. Die drei reellen Osculationskanten dieses zweiten seien mit $r_1, s_1, t_1$ bezeichnet. Zwischen den beiden Systemen finden Beziehungen statt, welche wir folgendermassen ausdrücken können:

Durch die neun Kanten des ersten Systems gehen zwölf Mal neun Kegelflächen $K_1$, durch je drei derselben neun, welche je in einer Kante des zweiten

Systems osculiren und umgekehrt; je drei Strahlen des ersten Systems liegen mit drei Strahlen des zweiten in einer Kegelfläche $K_0$; insbesondere giebt es 81 Kegelflächen $K_2$, welche in einer Kante des ersten und einer Kante des zweiten Systems osculiren.

Nach dem oben angegebenen Satze haben die drei Elemente der Flächeninvolution neunter Ordnung, welche durch die Verbindung dreier Punkte $ABC$ einer Ebene durch $S$ mit den neun Punkten des ersten Osculationssystems entstehen, die Eigenschaft, dass jede Ebene, welche die projicirenden Strahlen der beiden ersten Gruppen enthält, auch den der dritten Gruppe aufnimmt. Verbindet man also jetzt die beiden Osculationssysteme, so entsteht ein einziges Element der Flächeninvolution neunter Ordnung, d. h. die obigen drei Gruppen sind unendlich benachbart, die drei projicirenden Strahlengruppen ebenfalls, und da je drei unendlich benachbarte in einer Ebene liegen müssen, so ist das System der neun projicirenden Strahlen dieser Gruppe das der neun Wendestrahlen des Kegels $K_3$, d. h.:

Die Verbindungsebenen der neun Strahlen des einen Osculationssystems mit denen des zweiten schneiden sich zu neun in dem Systeme der neun Wendegeraden des projicirenden Kegels der Curve.

Es folgt daraus, dass die Verbindungslinien je zwei solcher Punktegruppen $R, S, T$ und $R_1, S_1, T_1$ der Curve stets auf derjenigen Flächengruppe zu neun liegen, welche durch die Verbindung des Centrums mit den Berührungspunkten der projicirenden Schmiegungsebenen bestimmt ist. Durch das eine Osculationssystem ist das andere also vollständig bestimmt. Eine beliebige Erzeugende auf einer dieser neun Flächen bestimmt zwei Punkte $R$ und $R_1$ der zwei Osculationssysteme und die Schmiegungsebenen in ihnen schneiden die Punkte $D'$ und $S$ resp. heraus. Diese fallen also zusammen, wenn die betrachtete Erzeugende zwei Punkte eines Dreiecks verbindet. Aber diese sind Verbindungsgerade von Punkten der neun B.-Quadrupel, die Schnittpunkte der Schmiegungsebenen somit die drei Punkte, welche das Projections-Centrum zum Quadrupel ergänzen. Daraus folgt, dass die Verbindungsgeraden der

zusammenfallenden Punkte $D', S$ die Tangenten sind, welche auf dem durch die Centrumstangente bestimmten Hyperboloid $H^c$ liegen und sie nicht schneiden, und dass die Verbindungsgeraden $D'S$ überhaupt stets Erzeugende dieses Hyperboloids bleiben.

Wir haben somit jetzt den Fall der einander um- und eingeschriebenen Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, wo in der That $D'$ und $D$ als Punkte desselben Quadrupels erhalten werden.

Da die neun Osculationspunkte jedes Systems für den allgemeinen Fall Punkte von zwölf Dreiecken sind, so haben die projicirenden Tripel $r, s, t$ und $r_1, s_1, t_1$ die bekannte Eigenschaft, dass die Tangentialebenen der Kanten sich mit den Gegenebenen in Erzeugenden des projicirenden Kegels $K_3$ schneiden, und dass diese Kanten sich zu Tripeln analoger Beschaffenheit zusammensetzen. Diese Strahlen sind die projicirenden für diejenigen beiden Flächengruppen der Involution, die aus der Verbindung des Centrums mit den Gruppen $R, S, T$ und $R_1, S_1, T_1$ resp. entstehen; sie gehen daher nach zwei Punktegruppen, die aus einem Paare entsprechender Punkte $D'$ und $S$ hervorgehen, und es wiederholen sich somit für diese die sämmtlichen Eigenschaften der beiden Systeme $R, S, T$ und $R_1, S_1, T_1$.

30. Die Punkte $D'$ und $S$ können speciell in dem Projectionscentrum zusammenfallen, alle Kegelflächen durch $ABC$ und $EFG$ bestehen dann aus Ebenenpaaren, und die beiden Systeme $r, s, t$ und $r_1, s_1, t_1$ vereinigen sich in dem Systeme der Wendestrahlen u. s. f.

Alle beispielsweise in $r$ osculirenden Kegelflächen schneiden aus der Curve Systeme $ABC$ heraus. Diejenige Kegelfläche, die der Ebene durch $S$ angehört, welche die Tangente der Raumcurve im Punkte $R$ enthält, berührt den projicirenden Kegel nach $r$ fünfstrahlig. Der sechste Strahl geht nach dem vierten Schnittpunkte der Ebene und der Curve.

Betrachten wir nun speciell eines der drei Systeme, für welche $S$ und $D'$ zusammenfallen. Dann ist das System der $ABC$ mit dem der $EFG$ identisch; die Punkte $R, S, T$ und $R_1, S_1, T_1$ fallen zusammen. Nach jedem der drei Strahlen $r, s, t$

wird der projicirende Kegel von acht Kegeln zweiter Ordnung osculirt, welche noch je drei der neun Strahlen enthalten; von vier Kegeln vierstrahlig, welche noch je zwei enthalten, und von einem Kegel sechsstrahlig berührt. Dies letztere muss thatsächlich eintreten, weil jetzt die Schmiegungsebene in $R$ auch durch $S$ und diejenige in $R_1$ auch durch $D'$ geht. Da die Strahlen $r, s, t$ für jedes der drei Systeme die Strahlen nach den Quadrupelpunkten derjenigen Curvenpunkte sind, für welche die Schmiegungsebenen projicirend sind, so sind diese drei Systeme sechsstrahliger Berührung die 27 Berührungserzeugenden der Tangentialebenen, welche man aus den neun Wendekanten des Kegels $K_3$ an diesen legen kann.

Jedes Tripel von drei Strahlen $abc$ kann gleichzeitig als Tripel dreier Strahlen $efg$ aufgefasst werden, nach drei solchen Strahlen kann also der Kegel $K_3$ von einem Kegel zweiter Ordnung berührt werden und es ergeben sich somit drei Systeme dreifach berührender Kegelflächen. Die Berührungserzeugenden von je zwei solchen liegen selbst in einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Durch je zwei Berührungserzeugende gehen drei Kegelflächen, welche noch in einer dritten Kante berühren. Unter allen giebt es drei Systeme von je einfach unendlich vielen, welche ein Mal zweistrahlig und ein Mal vierstrahlig, 27 welche sechsstrahlig berühren. Hält man einen Berührungsstrahl fest, so liegen die jedesmaligen beiden andern in Ebenen dreier Büschel. Construirt man zu drei Punkten einer Ebene durch $D'$ die fünfstrahlig berührenden Kegelflächen, so liegen die sechsten Schnittpunkte in einer Ebene durch $S$ also $D'$, d. h. die sechs Punkte auf Strahlen einer Kegelfläche. Dadurch entstehen an $D'$ zwei projectivische Büschel, die gemeinsamen Elemente führen zu Gruppen von je drei Strahlen eines dreifach berührenden Kegels, so dass der fünfstrahlig berührende Kegel in jedem der drei Strahlen noch durch einen der beiden andern geht.

Speciell folgt für unsere vorliegende circulare Curve dritter Ordnung, dass durch jeden Punkt derselben drei reelle und sechs nicht reelle Osculationskreise gehen, deren

neun Osculationspunkte mit dem gemeinsamen Schnittpunkte in vier Systemen von drei Kreisen liegen. Der Kreis durch je drei Punkte eines Dreiecks schneidet somit die $C_3$ im gemeinschaftlichen Schnittpunkte seiner drei reellen Osculationskreise.

Irgend zwei Dreiecke liegen im Weitern perspectivisch für ein Dreieck von Punkten $F$ der Curve; sind zwei der Punkte $F$ Wendepunkte, so ist es auch der dritte und die Figur des Steiner'schen Polygons geht über in diejenige des Pascal'schen Sechsecks. Die Ecken jedes Steiner'schen Sechsseits für zwei Wendepunkte als F.-Punkte, wie die vier Punkte $K$ und die beiden Punkte $S_2$ auf dem Oval in Taf. V sind somit je sechs Punkte eines Kegelschnittes; sie gehören unter zwölf Systemen von je einfach unendlich vielen solchen zu denjenigen der reellen Linie $h$, mit dieser als gemeinschaftlicher Pascallinie oder Polare und mit dem entsprechenden Punkt $H$ als gemeinsamem Pol. Zu jeder Linie $h$ gehören drei Dreiecke von Punkten $J$, in welchen je ein Kegelschnitt die $C_3$ berührt, und welche in der Anzahl von 36 die gemeinsamen der eben genannten zwölf Systeme mit den drei Systemen dreifach berührender Kegelschnitte sind.

Schneidet man das Projectionssystem der vorigen Untersuchung mit einer beliebigen Ebene und spricht man die räumlichen Constructionen für das Schnittsystem aus, so hat man im Wesentlichen die Sätze der zweiten Steiner'schen Mittheilung (Steiner: „Werke" Bd. II p. 377 ff.).

---

## C. Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$-Schlusses für $n = 5^{k_2}$; $n = 2^k . 3^{k_1} . 5^{k_2}$ und die allgemeine Zahl $n$.

Die Weiterführung unserer Untersuchung hat sich zunächst mit den Steiner'schen Polygonen von der Seitenzahl Zehn zu befassen, welche in analogem Sinne, wie bis anhin, zur Primzahl Fünf gehören. Die Aufstellung aller Primzahlinvolutionen und ihrer Combinationen, d. h. der Involution für die allgemeine Zahl $n$ schliesst sich daran an mit der

Einsicht, dass das bis jetzt aufgestellte Transformationsgesetz allgemeine Gültigkeit besitzt und den eigentlichen Charakter aller Steiner'schen Involutionen auf der Curve dritter Ordnung bezeichnet. Die Involutionsreihen für $n = 2^k$ behalten dabei den andern Primzahlinvolutionen gegenüber die schon hervorgetretene Sonderstellung bei; es wird sich später zeigen, dass eine analoge Absonderung auch in gewissem Betracht bezüglich der Reihen für die Zahlen von der Form $n = 3^{k_1}$ existirt, und dass mit dieser die Bildung der verschiedenen Clebsch'schen Punktsysteme in engem Zusammenhange steht.

## IX. Ableitung der Reihe für $n = 5^{k_2}$ und ihre Transformation in den bekannten Involutionsreihen.

31. Wie bis anhin knüpfen wir die Betrachtung der räumlichen Verhältnisse an die degenerirten unter den neuen Secantenpolygonen. Ein solches besteht aus fünf Doppelecken und vier Doppelseiten, abwechselnd der einen und andern Fläche angehörend und schliesst mit je einer Tangente derselben Flächen. Sei $A_1 \ldots A_5$ ein solcher Linienzug, so liegen die Geraden $A_2 A_3$, $A_4 A_5$ und die Tangente in $A_1$; ebenso $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ und die Tangente in $A_5$ je auf der nämlichen Fläche. Projicirt man das Fünfeck wieder aus einer Kegelspitze $M_i$ auf die Curve nach $A_1' \ldots A_5'$, so liegen die Geraden $A_1 A_3'$ und $A_1 A_2'$, also auch $A_1' A_2$ und $A_1' A_3$ auf einer gewissen Fläche $G$ des Büschels. Ebenso sind die Geradenzüge $A_3' A_5 A_4' A_2$ und somit auch $A_3 A_5' A_4 A_2$ je auf einer einzigen Fläche gelegen, und da dies endlich auch für $A_2 A_4'$ und $A_1 A_3'$ gilt, so bilden alle diese Geraden ein geschlossenes Secantenpolygon $A_1 A_2' A_4 A_5' A_3 \ldots$ von zehn Ecken und Seiten, welche zu fünf der einen und andern Schaar derselben Fläche $G$ angehören. Daraus folgt aber sofort, dass die Punkte $A_1 \ldots A_5$ alle gleichmässig die Eigenschaft haben, durch die Tangente in jedem von ihnen und die Verbindungsgeraden der vier andern in zwei bestimmten Paaren dieselbe Fläche des Büschels zu erzeugen.

Zwischen den fünf Punkten $A_i$ sind zehn Verbindungslinien möglich, sie setzen sich zu fünfen als Seiten zweier

Fünfecke zusammen, je nachdem man jeden Punkt mit dem darauffolgenden, oder erst mit dem nächstfolgenden verbindet, also eine Ecke überspringt. Wir können also auch sagen, dass die Tangente mit einer Seite und einer Diagonale des Fünfecks $A_1 .. A_5$ auf derselben Fläche liegt. Dem Diagonalfünfseit entspricht eine zweite Fläche, welche geschlossene Zehnseite enthält, deren Seiten, nicht aber deren Ecken, von den Zehnseiten der ersten Fläche $V^{(10)}$ verschieden sind.

Die characteristische Lage von fünf solchen Punkten wollen wir dadurch ausdrücken, dass wir sagen sie bilden ein Fünfeck; die zehn Verbindungslinien der Ecken eines solchen Fünfecks begegnen der Curve dritter Ordnung in der Projection paarweise in den fünf Schnittpunkten derselben mit den Tangenten seiner Ecken. Die Construction solcher Fünfecke ist an diejenige der Zehnschlussflächen $V^{(10)}$ geknüpft und wir wenden uns daher zuerst zur directen Bestimmung dieser Flächen.

Die fraglichen Flächen $V^{(10)}$ haben die Eigenschaft, dass ihre Regelschaaren sich in Involutionen fünfter Ordnung gruppiren, so dass fünf Erzeugende der einen sich mit fünfen der andern Schaar zu einem geschlossenen Linienzuge zusammensetzen. Nebst der Raumcurve $R_4$, von der wir ausgehen, ist das Erzeugniss eine zweite solche und ein Kegelschnitt in einer Tetraederebene $P_i$; in Bezug auf diese Ebene und ihre Gegenecke ist jedes Polygon centrisch involutorisch, so dass zu jeder Fläche $V^{(10)}$ wieder eine Ecke $M_i$ und Gegenebene $P_i$ gehören, für welche die Ecken des Polygons paarweise perspectivisch liegen und in welcher sich die Seiten paarweise begegnen. Betrachtet man nun ein degenerirtes Polygon mit einem Scheitel $S_1$ als Ecke, und geht man von dieser aus um zwei Polygonseiten weiter, so gelangt man zum Berührungspunkte einer auf der Fläche liegenden Tangente, mit welcher das Polygon sich schliesst. Sei nun $G$ eine beliebige Fläche des Büschels und die Tangente in $S_1$ liege auf der Kegelfläche aus $M_1$, so gehen durch jede der drei Tetraederkanten, die in $M_1$ zusammentreten, zwei Tangentialebenen an diese, welche der Raumcurve in Punkten $P$ einer acht-

punktigen Gruppe begegnen, welche also in Paaren auf vier Geraden durch $M_1$ liegen.

Die vier Ebenen nach diesen Geraden durch $S_1$ bestimmen eine Vierergruppe und die Ebenen durch $S_1$ nach den B.-Quadrupeln derselben bestimmen als Tangentialebenen sechszehn Flächen $G_1$ von der Eigenschaft, dass man von $S_1$ aus auf jeder derselben bis zum Schnitt mit der Curve auf zwei Erzeugenden weiter gehen kann, um zu einem Punkte $P$ zu gelangen. Ergänzt man die Fläche $G$ zu einer Vierergruppe, so entstehen sechszehn Gruppen $G_1$ derselben Involution; durch die Flächen $G$ sind die Flächen $G_1$ eindeutig bestimmt, aber auch umgekehrt, so dass wir zwischen den Gruppen der Viererinvolution ein 1—16-deutiges Entsprechen haben. So oft eine Gruppe $G$ mit einer Gruppe $G_1$ zusammenfällt, haben wir vier der gesuchten Flächen $V^{(10)}$. Es wird das Zusammentreffen im Allgemeinen für siebzehn Gruppen eintreten, aber nach der Natur des Entsprechens sind fünf dieser Gruppen die schon gefundenen des Sechsschlusses $V^{(6)}$ und die Gruppe der Kegelflächen.

Es giebt somit zwölf Gruppen von je vier Flächen $V^{(10)}$. Man kann sie aber auch als vier Gruppen zu je zwölf auffassen, wobei die Zehnseite der Flächen einer solchen Gruppe aus derselben Ecke $M_i$ des Tetraeders doppelt projicirt werden. Sie bilden dabei sechs Paare derart, dass für jedes Paar die Ecken aller Zehnecke beider Flächen dieselben, für je zwei Zehnecke auf einem solchen Paar also nur die Seiten verschieden sind. Projiciren wir also aus einer Ecke $M_i$ irgend ein Fünfeck auf die Raumcurve, so bilden beide zusammen die Ecken zweier Zehnecke auf einem Paar von Flächen $V^{(10)}$.

Zwischen den zehn Ecken sind 45 Verbindungslinien möglich, nämlich die 20 Seiten der zwei Zehnseite, die 5 Verbindungsgeraden durch $M_i$ und 10 Verbindungslinien innerhalb jedes Fünfecks. Von den sechszehn Gruppen von Flächen $G_1$ sind je vier reell, es werden also von den zwölf Vierergruppen vier, also sechszehn Flächen $V^{(10)}$ reell sein; von diesen sind zwei hyperbolische, zwei elliptische Gruppen. Mittelst der

beiden Gruppen von hyperbolischen Flächen $V^{(10)}$ können alle reellen Fünfecke dargestellt werden, ihre Seiten bestimmen mit den zugehörigen Ecken $M_i$ zwei Fünfseite von Ebenen, welche dem Kegel aus $M_i$ eingeschrieben und den Umrisskegeln eines Paares von Flächen $V^{(10)}$ umschrieben sind.

32. Setzen wir also auf Taf. VII analog wie auf Taf. VI $U_5$ als die Spur des Umrisskegels aus $M_3$ an eine der beiden zu $M_3$ gehörenden Flächen $V^{(10)}$ fest, so ist damit auch die Spur des Umrisskegels an die andere des Paares bestimmt, welche nicht eingetragen; $L_1$ berührt wieder das reelle Linienpaar des durch $U_5$ und $L_3$ bestimmten Umrisssystems des Flächenbüschels aus der Ecke $M_3$, und ergänzt damit die Daten der Disposition der Durchdringung vollständig. Dasjenige der Spur $L_3$ ein- und $U_5$ umschriebene Fünfseit, dessen eine Ecke der Punkt $M_3'$ ist, ist die Doppelprojection eines Zehnecks der Raumcurve aus $M_3$, für welches das Centrum eine Ecke ist. Die Ecken desselben projiciren sich somit als zwei Fünfecke $N_1 \ldots N_5$ und $N_1' \ldots N_5'$, wo $N_1'$ mit $M_3'$ identisch ist. Die Verbindungslinien und Tangenten der Gruppe der gestrichenen $N_i$ des Ovals bestimmen räumlich fünf Flächen, für welche die Gruppe der Verbindungslinien des Centrums mit den fünf Punkten des Fünfecks auf dem unendlichen Aste im Bilde die projicirende ist; es schneiden sich somit je eine Tangente und und zwei Verbindungslinien der Punkte der gestrichenen Gruppe in einem Punkte der ungestrichenen; wie die Tangente in $N_1'$, und die Geraden $N_3' N_4'$ und $N_2' N_5'$ in $N_1$ u. s. f., und weil ausserdem der Punkt $N_1$ der Punkt $S_i^c$ unserer Figur ist, so sind die Geraden $N_3' N_4'$ und $N_2' N_5'$, gleichzeitig die Spuren der projicirenden Tangentialebenen $s_v^{(10)}$ an die Flächen $V^{(10)}$ von den Umrissen $U_5$.

Ebenso schneiden sich die Tangenten in den Ecken $N_1 \ldots N_5$ mit je zwei Verbindungslinien der vier andern in Punkten der Curve $C_3$, wie die Tangente in $N_1$ und die Geraden $N_3 N_4$, $N_2 N_5$ in $F_1$, die Tangente in $N_2$ mit $N_3 N_1$ und $N_4 N_5$ in $F_2$ u. s. f., den Durchstosspunkten der projicirenden Erzeugenden einer Gruppe von fünf reellen Flächen. Ergänzen wir jeden der Punkte $N_i$ zu einem

Quadrupel, so erhalten wir durch ihre Tangenten dieselbe Flächengruppe, und sie ordnen sich daher in drei weitere Gruppen zu fünf von drei Fünfecken, so dass auch die Verbindungslinien der vier übrigen jedes Mal mit der Tangente im fünften paarweise durch einen der Punkte $F_i$ gehen. Betrachten wir nun unter den Punkten $F_i$ zwei speciell, etwa $F_1$ und $F_4$, so können wir den Linienzug $N_1 N_2 N_5 N_3 N_4$ auf dem Oval in Verbindung mit den Tangenten im Anfangs- und Endpunkte durch $F_1$ und $F_4$ resp. als degenerirtes Zehnseit auffassen: die beiden Geraden $N_2 N_5$ und $N_3 N_4$ und die Tangente in $N_1$ durch $F_1$ als je eine Gruppe von fünf Strahlen mit zwei paarweise vereinigten; ebenso die Geraden $N_2 N_1$, $N_3 N_5$ und die Tangente in $N_4$ als analoge Gruppe am Punkte $F_4$. Dieser Linienzug wiederholt sich in gleicher Bezeichnung für Punkte des unendlichen Astes — in der Figur nicht eingetragen —, so dass am Punkte $F_1$ und $F_4$ je eine Strahleninvolution fünfter Ordnung durch je zwei Gruppen bestimmt ist.

Lassen wir ausser diesen beiden die Gruppen, welche aus dem gemeinsamen Scheitelstrahl entspringen, sich projectivisch entsprechen, so geht aus dieser Verbindung eine Curve neunter Ordnung mit vierfachen Punkten in $F_1$ und $F_4$ und mit Doppelpunkten in $N_2$, $N_3$, $N_5$ hervor. Unsere Curve $C_3$ begegnet ihr in den vierfachen Punkten, in den sechs Doppelpunkten und berührt sie in den zwei Punktepaaren $N_1$ und $N_4$, hat also 28 Punkte mit ihr gemein, oder ist Bestandtheil von ihr. Aber wir bemerken im Weitern, dass die zwei Gruppen von fünf Strahlen, welche Doppelelemente enthalten und die Involution bestimmen, fünf Paare einer quadratischen Involution sind, weil zu jedem Strahl der einen Gruppe ein Strahl in der andern gehört, der mit dem ersten nach Punkten desselben Quadrupels geht. Somit zerfällt das Gesammterzeugniss in unsere $C_3$, in eine $C_4$ mit zwei Doppelpunkten in $F_1$ und $F_4$ resp. und in einen Kegelschnitt $K$ durch diese.

Irgend zwei entsprechende Gruppen in beiden Involutionen schneiden sich in 25 Punkten des Gesammterzeugnisses, auf jedem Strahl gehören zwei Punkte der $C_3$, zwei der $C_4$

6*

und einer dem Kegelschnitt $K$ an; für jede der Curven $C_3$ und $C_4$ bilden die zehn Punkte die Ecken eines Steiner'schen Zehnecks; auf dem Kegelschnitt $K$ entstehen dabei fünfpunktige Gruppen der Involution fünfter Ordnung, nach welchen die Strahlen entsprechender Gruppen gehen.

Weil aber ferner die Verbindungslinien und Tangenten innerhalb jedes der vier Fünfecke $N_i$ dieselbe Flächengruppe von fünf ergeben, so folgt, dass man auch die Linienzüge $N_1 N_3 N_4 N_5 N_2$ mit den Tangenten $N_1$ und $N_2$ durch $F_1$ und $F_2$ und ebenso $N_1 N_5 N_2 N_4 N_3$ mit den Tangenten in $N_1$ und $N_3$ durch $F_1$ und $F_3$, endlich $N_1 N_4 N_3 N_2 N_5$ mit den Tangenten in $N_1$ und $N_5$ durch $F_1$ und $F_5$ je auf dem Oval und auf dem unendlichen Aste als degenerirte Zehnseite auffassen kann, so dass man jeden der vier Punkte $F_2 .. F_5$ mit $F_1$ combiniren kann, ohne dass die zwei Gruppen, welche die Involution bestimmen, sich ändern. Daraus folgt aber, dass die dem Scheitelstrahl $F_1 F_4$ an $F_1$ entsprechende Gruppe ausser der Tangente in $F_1$ aus den Strahlen nach $F_2$, $F_3$, $F_5$ besteht oder allgemeiner, dass in jeder Involution an einem der Punkte $F_i$ die Strahlen nach den vier andern mit der Tangente in ihm selbst ein Element bilden. Das aus den Gruppen mit gemeinsamem Strahl entstehende Polygon ist insofern ausgezeichnet, weil die F.-Punkte $F_1$ und $F_4$ selbst als Ecken auftreten; von den acht übrigen sind drei die noch fehlenden Punkte $F_i$ und die übrigen sind fünf neue Punkte $T_i$, unter diesen die Tangentialpunkte $T_1$ und $T_4$ der Scheitel $F_1$ und $F_4$; und da nach der Bedingung für den Vier- und Sechsschluss die Tangenten in $F_1$ und $F_4$ und ebenso die Verbindungslinien ihrer Tangentialpunkte mit den F.-Punkten sich nicht auf der $C_3$ schneiden können, so gelangen wir zu drei weitern Punkten $T_2$, $T_3$, $T_5$ und damit zu dem von Steiner aufgestellten Kriterium für den Zehnschluss.

Demnach characterisiren sich die fünf Punkte $T_i$ folgendermassen: Zwei derselben $T_1$ und $T_4$ sind die Schnittpunkte der Tangenten in $F_1$ und $F_4$ mit den resp. Geraden $F_4 F_3$ und $F_1 F_2$; die drei weitern sind Schnittpunkte der Seiten des

Dreiecks der drei andern $F_i$, und zwar $T_5$ der Schnitt der Seite $F_2F_3$ mit $F_1F_4$; $T_3$ der Schnitt von $F_4F_2$ mit $F_1F_5$ und $T_2$ der Schnitt von $F_4F_5$ mit $F_1F_3$. Da aber je zwei Punkte $F_i$ als F.-Punkte dieselbe Anordnung der $T_i$ in cyclischer Vertauschung wiederholen, so folgt, dass die Tangente jedes Punktes $F_i$ von zwei Verbindungsgeraden der vier andern in ihrem Tangentialpunkte geschnitten wird, oder dass die Punkte $F_i$ ein Fünfeck bilden.

Somit haben auch je zwei Punkte $N_i$ die Eigenschaft von F.-Punkten und es liegt in der That in der Figur für jedes Paar von solchen ein degenerirtes Polygon vor. Aus einem einzigen reellen Fünfeck können daher alle reellen durch Verbindung mit allen Punkten der $C_3$ erhalten werden, gemäss der doppelten räumlichen Erzeugungsweise der Flächengruppen, die wieder stattfindet (Art. 3).

33. Zur Betrachtung der reellen Fünfecke sind wir geführt worden durch die Einführung der beiden reellen Umrisskegelschnitte $U_5$. Die ihnen umschriebenen Fünfseite können wir durch eine an der Kante $M_2M_3$ liegende Ebenen-Involution ersetzen und die acht Doppelelemente nach den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten von $U_5$ und $L_3$ bestimmen. Aber neben dem einzig reellen giebt es noch fünf Paare von Umrisskegelschnitten $U_5$, die unter sich eine analoge Beziehung haben und auf zwei elliptische und vier Mal auf zwei nicht reelle Flächen $V^{(10)}$ führen; so dass zu jeder Ecke 20 neue nicht reelle Punkte hinzutreten. Eine Ecke des reellen Fünfecks ist somit gemeinsame Ecke von sechs Fünfecken; aus jedem entsteht eine Gruppe von fünf Flächen und alle diese haben die aus der Tangente der gemeinsamen Ecke entstehende gemeinsam. Diese Fläche entsteht also fünf Mal, enthält 10 Verbindungsgerade der 20 neuen Punkte und neben ihr entstehen 20 neue nicht reelle Flächen, welche somit unter sich und mit den fünf reellen gleichmässig die Eigenschaft haben, dass je zwei von ihnen eine unendliche Folge Steiner'scher Secantenpolygone zulassen. Die 20 neuen Punkte besitzen deshalb allen Ecken des reellen Fünfecks gegenüber dieselben Eigenschaften, d. h. sie lassen sich von

jeder aus als sechs Fünfecke mit dieser als gemeinschaftlicher Ecke darstellen. Wir haben somit eine geschlossene Gruppe von 25 Punkten und Flächen; die Punkte lassen sich in 30 Fünfecke (und 30 Diagonalfünfecke), von jeder Ecke aus als sechs solche, darstellen und sechs Mal in fünf Fünfecke so gruppiren, dass diese alle 25 Punkte umfassen.

Ihre $25 \cdot 12$ Verbindungslinien liegen zu 12 auf jeder Fläche und zwischen den fünf Gruppen $G_1 \ldots G_5$, welche alle 25 enthalten, bestehen dieselben Beziehungen, wie zwischen den fünf Punkten einer solchen, d. h. eines Fünfecks selbst. Die zehn Ebenen durch die fünf Ecken $F_i$ eines Fünfecks treffen die Raumcurve paarweise in fünf Punkten $S_i$, den Schnittpunkten der Schmiegungsebenen in den $F_i$ und Punkten eines neuen Fünfecks. Die Verbindungslinien der $F_i$ und $S_i$ liegen daher auf den durch die Tangenten der $F_i$ bestimmten Flächen, gehören aber zur andern Schaar. Durch jeden Punkt $F_i$ und den entsprechenden $S_i$ gehen zwölf Ebenen nach solchen Verbindungsgeraden zweier $F_i$, welche mit der Tangente in $F_i$ auf derselben Fläche liegen; sie bilden die $25 \cdot 12$ Verbindungsebenen dreier Punkte innerhalb jedes der 30 Fünfecke, von denen jedes zu zehn Ebenen führt. Durch irgend zwei Punkte $F_i$ von 25 sind demnach die drei übrigen des Fünfecks mittelst der Punkte $S_i$, und aus zwei Paaren von Punkten verschiedener Fünfecke ist daher die ganze Gruppe von 25 solchen bestimmt. Zwischen den 25 Punkten $F_i$ sind $25 \cdot 12$ Combinationen zu zweien möglich, welche ein Fünfeck vollständig bestimmen; jedes Fünfeck wird dabei zehn Mal erhalten, ihre Anzahl ist also 30, wie bekannt.

Die Involution des Zehnschlusses ist somit von der Ordnung 25. Jede Fläche lässt sich mit 24 andern combiniren, aber je vier derselben erzeugen auf ihr dieselbe Involution ihrer Regelschaaren, so dass sechs verschiedene solche auftreten; nach dem Baue dieser Involutionen fünfter Ordnung sind die acht Doppelelemente derselben vier Paare einer quadratischen Involution. Im Ganzen haben wir so-

mit 48 Doppelelemente auf unserer Fläche; sie schneiden die 24 B.-Quadrupel der mit der betrachteten combinirten Flächen heraus und bestimmen für die Schaar, welche die Centrumstangente schneidet, die 48 projicirenden Tangentialebenen an die Flächen $V^{(10)}$.

34. Verbindet man also die 25 Punkte einer Gruppe unter sich, so entsteht eine Gruppe von 25 Flächen; verbindet man jetzt aber die Punkte der vier verschiedenen Gruppen zu 25 ihrer B.-Quadrupel, so entstehen drei neue Flächengruppen. Man sieht ohne Weiteres, dass dies die Ergänzung in der Involution des Vierschlusses ist, und dass jene Flächen auch 25 Vierergruppen bilden. Weil aber für jede Involution fünfter Ordnung die Eigenschaft besteht, dass sich zwei Gruppen derselben als fünf Paare einer der quadratischen Involutionen darstellen, so ist das Transformationsgesetz auch für die Regelschaaren gültig, und man beweist, wie in Art. 21 unter Zuziehung der Hülfsfläche, dass die neue Involution von der Ordnung $10^2$ diejenige des Zwanzigschlusses ist.

Unter den Doppelelementen der Involution zehnter Ordnung der Regelschaaren sind die Doppelelemente der beiden Involutionen zweiter und fünfter Ordnung enthalten, dann noch vier weitere Paare aus der Ergänzung des Paares der quadratischen in der Involution fünfter Ordnung, also neun Paare. Die Betrachtung eines degenerirten Zwanzigseits zeigt sofort, dass wieder je vier Flächen mit der betrachteten dieselbe, also im Ganzen 18 verschiedene Involutionen entstehen lassen. Unter der Gesammtzahl ihrer Doppelelemente sind enthalten jedes Mal ein Paar von Linien $g$, und die acht Doppelelemente der Partialinvolution fünfter Ordnung; als eigentliche solche bleiben somit $18^2-(18\cdot 8+18\cdot 2)$ oder 144. Dies ist somit auch die Zahl der Flächen $V^{(20)}$; welche in der That erhalten werden durch Ergänzung jeder Fläche $V^{(4)}$ in der Involution des Zehnschlusses. Ihre Anzahl ist somit $6\cdot 24$, eine Zahl, welche durch die uneigentlichen Doppelflächen $V^{(4)}$ und $V^{(10)}$ auf 198 gebracht wird.

Die Eigenschaft der Involution fünfter Ordnung der Regelschaaren, ihre Gruppen paarweise als fünf Paare einer qua-

dratischen Involution darstellen zu lassen, berechtigt sofort zur Anwendung des Schlusses, den wir schon für die Involutionen dritter Ordnung (Art. 21) durchgeführt haben:

Die Transformation der Involution des Zehnschlusses in derjenigen für die Zahl $2^k$ ist mit ihrer Umkehrung identisch. Sie giebt die Involution von der Ordnung $(5 \cdot 2^k)^2$ des $2 \cdot 2^k \cdot 5$-Schlusses und ist somit äquivalent der Multiplication der Polygonseitenzahl mit $2^k$ resp. 5.

Zu jeder Gruppe von 25 Punkten $F_i$ gehört eine solche von 25 Schnittpunkten $S_i$ ihrer Schmiegungsebenen; aber zu jedem $S_i$ gehören je noch acht weitere Schmiegungsebenen, deren Berührungspunkte mit $S_i$ und unter sich verbunden je eine Gruppe von neun Flächen ergeben. Betrachten wir das reelle Fünfeck der $F_i$ und suchen wir zu jeder seiner Ecken die beiden andern des reellen Dreiecks, so entstehen dadurch zehn neue Punkte, sagen wir $F_i'$. Die Verbindungslinie zweier $F_i'$ ist entweder Verbindungslinie zweier Ecken desselben Dreiecks, also mit der Tangente der Gegenecke oder eines Punktes $F_i$ auf derselben Fläche gelegen — solcher Linien giebt es fünf —, oder sie ist Verbindungslinie der Ecken zweier Dreiecke. Von ihren sechs Ecken liegen zwei in zwei Punkten $F_i$, und zwei der sechs Verbindungslinien der vier übrigen $F_i'$ liegen mit der Verbindungslinie zweier $F_i$ auf derselben Fläche. Solcher Linienpaare giebt es so viele, als Combinationen von fünf Punkten zu zweien, also zwanzig Linien.

Somit sind zwischen den zehn Punkten $F_i'$ 25 Verbindungslinien derart möglich, dass sie zu fünf auf den Flächen einer Gruppe liegen; sie theilen somit die Punkte $F_i'$ nothwendig in zwei Fünfecke. Die fünfzehn Punkte $F_i$ und $F_i'$ bilden demnach nicht nur fünf Dreiecke, sondern auch drei Fünfecke, und die durch ihre Tangenten und Verbindungslinien gebildeten Flächen sind daher die reellen dreier Gruppen zu 25 und von fünf Gruppen zu neun. Das Analoge gilt für die nicht reellen Flächen der betrachteten Gruppen. Es ist also hier aus der Darstellbarkeit der Punktegruppen als Dreiecke

resp. Fünfecke unmittelbar evident, dass die Umkehrbarkeit der Transformation für die Flächeninvolution diejenige für die Regelschaarinvolutionen nach sich zieht, und dass somit die erhaltene Involution diejenige ist, welche Steiner'sche Polygone von 30 Seiten liefert.

Jede Fläche kann mit 192 andern combinirt werden; je acht derselben erzeugen dieselbe Involution mit $24 \cdot 28$ Doppelelementen, worunter $24 \cdot 12$ uneigentliche. Es bleiben somit 384 eigentliche als die Anzahl der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(30)}$. Im Ganzen hat die Involution als von der Ordnung $(3 \cdot 5)^2$ Doppelelemente in der Anzahl 448; es bleiben nach Abzug der Flächen $V^{(6)}$ und $V^{(10)}$ in der That nach 384 Flächen $V^{(30)}$.

Fassen wir nun die Punkte einer solchen Gruppe von $9 \cdot 25$ auf als Punkte $S_i$, so hat jede Partialgruppe von 25 unter ihnen die Eigenschaft, als Schnittpunktgruppe sämmtlicher Schmiegungsebenen einer andern Gruppe von $9 \cdot 25$ Punkten $F_i$ hervorzugehen. Weil die $S_i$ sowohl 25 Gruppen zu neun als neun Gruppen zu 25 sind, wie wir soeben bewiesen, so bilden die aus ihnen aufs Neue abgeleiteten Gruppen $F_i$ 25 Gruppen zu 81 Punkten und umgekehrt; und diese Umkehrung gilt auch zwischen den Partialgruppen, oder den Fünfecken und Neunecken, die auftreten. Auch hier kann durch jedesmalige Auffassung einer Punktegruppe $F_i$ als Gruppe $S_i$ der Uebergang von einer Involution aus einer Potenz von 3 zur nächstfolgenden vollzogen, d. h. die Transformation in der Involutionsreihe für Polygone von $2 \cdot 3^{k_1}$ Seiten ausgeführt werden, mit der Eigenschaft, dass zugleich fünf Gruppen von je $3^{k_1}$ Elementen auch $3^{k_1}$ Fünfecke sind.

Diese Erweiterung ist somit diejenige des $2 \cdot 3^{k_1} \cdot 5$-Schlusses, oder äquivalent der Multiplication mit $3^{k_1}$.

35. Wir kehren zur Involution des Zehnschlusses zurück. Je 25 Punkte lassen sich sechs Mal in fünf Fünfecke zusammenfassen, zwischen welchen derselbe Zusammenhang besteht, wie zwischen den Ecken eines solchen selbst. Bezeichnen wir jetzt die Gesammtheit der 25 Punkte als ein Element $G_1$, so kann man auf der Raumcurve zwei weitere variable Gruppen

$G_i$ annehmen, und mittelst der durch die erste bestimmten Flächengruppe von ihnen zu zwei neuen solchen übergehen. Dann ist es möglich diese vier so zu bestimmen, dass zwischen ihnen der Zusammenhang von Punkten eines Fünfecks stattfindet, so dass durch zwei unter ihnen die drei andern bestimmt sind. Betrachten wir als Repräsentanten der ersten Gruppe ihr reelles Fünfeck und entsprechend bei den vier andern, so haben wir jetzt eine Gruppe von fünf reellen Fünfecken, so gelegen, dass die Verbindungslinien und Tangenten innerhalb jedes Fünfecks eine Flächengruppe erzeugen, auf der auch die Verbindungsgeraden zweier bestimmten Paare der vier andern gelegen sind. Auf jeder Fläche liegen zwölf dieser Geraden.

In der Projection schneiden sich somit die Verbindungslinien zwischen den 25 reellen Punkten 25 Mal zu zwölf mit den Tangenten in 25 neuen Punkten. Jeder Punkt kann mit 20 andern verbunden werden, welche mit ihm nicht zum selben Fünfeck gehören. Die durch zwei solche Punkte gehenden zwölf Geraden setzen sich zu einem geschlossenen Linienzuge von 24 Doppelseiten zusammen und sind im Anfangs- und Endpunkte mit Tangenten durch eben diese Punkte geschlossen; sie bilden also ein degenerirtes Polygon von 50 Seiten. Was für die Lagenbeziehung der reellen Fünfecke gilt, bleibt fortbestehen für die Gruppen von 25 Punkten, zu denen sie gehören; also zunächst für fünf Gruppen $G_i$ von 25 Punkten; die analoge Anordnung von fünf Gruppen $G_i$ lässt sich aber selbst noch vier Mal wiederholen, so dass wir jetzt 25 Gruppen $G_i$ haben, mit genauer Befolgung des Zusammenhangs zwischen ihnen, der für 25 Punkte stattfindet.

Die so entstehende Involution ist von der Ordnung $(25)^2$ und diejenige des Fünfzigschlusses. Jede Fläche lässt sich mit $24 \cdot 25$ andern combiniren, je 20 Flächen ergeben mit ihr dieselbe Regelschaarinvolution; als eigentliche Doppelelemente bleiben nach Abzug derjenigen für den Zehnschluss $\frac{24 \cdot 25}{20} \cdot 48 - \frac{24 \cdot 25}{20} \cdot 8$ oder 1200; dies ist auch die Anzahl der Flächen $V^{(50)}$, die wir direct aus den 48 Flächen $V^{(10)}$ ab-

leiten durch Erweiterung ihrer Gruppen in der neuen Involution.

Gehen wir wieder zur Erweiterung in der Involution neunter Ordnung über, so enthält jetzt jede Gruppe 25 reelle Punkte, zu welcher nun 50 neue reelle hinzutreten. Von diesen lässt sich genau wie vorhin beweisen, dass sie sich in zwei Gruppen von 25 theilen, d. h. dass die 75 reellen Punkte zusammen sowohl 25 Dreiecke, als drei Gruppen von 25 sind, wie die erste.

Im Bilde besitzen wir daher drei Gruppen von 25 reellen Punkten; aus der ersten entspringen durch die Verbindungslinien die 25 Punkte der Tangentialgruppe, durch welche auch die $(25)^2$ Verbindungsgeraden der beiden andern Gruppen gehen, und analog für die Tangentialgruppen dieser. Durch jeden der 75 Tangentialpunkte gehen somit 37 Gerade und eine Tangente; sie wiederholen genau den Zusammenhang der Ausgangsgruppe, d. h. sie sind drei Gruppen zu 25, und umgekehrt; aber auch 15 Gruppen zu fünf und umgekehrt. Jeder Punkt $F$ kann demnach mit 40 andern combinirt werden, mit welchem er nicht F.-Punkt ist für Polygone von 10 oder 30 Seiten, und durch welche Punkte nebst den Tangenten im Anfangs- und Endpunkte je 37 Gerade eines continuirlichen Linienzuges gehen, der als degenerirtes Polygon von 150 Seiten aufzufassen ist.

Dass diese neue Involution solche Polygone liefern muss, folgt auch schon aus der Umkehrbarkeit der Transformation in den Partialgruppen; diese gestattet aber sofort die Ausdehnung dieses Gesetzes auf die Erweiterung für Gruppen von $3^{2k_1}$ Punkten, so dass die Involution von der Ordnung $(25 \cdot 3^{k_1})^2$ auch diejenige der umgekehrten Transformation ist und Polygone von $2 \cdot 5^2 \cdot 3^{k_1}$ Ecken und Seiten liefert.

Andrerseits kann aber die Gesammtheit von $(25)^2$ Punkten als neues Element $G_i$ aufgefasst und durch 24 andere wieder zu einer neuen Gruppe $G$ ergänzt werden; so dass wir bei $k_2$-maliger Wiederholung dieser Erweiterung eine Flächeninvolution von der Ordnung $(5^{k_2})^2$ besitzen, deren Regelschaaren in projectivische Involutionen von der Ordnung $5^{k_2}$ geordnet sind und

sich zu Polygonen von $2 \cdot 5^{k_2}$ Seiten zusammenfügen. Und weil dabei die Involutionen der Regelschaaren ebenfalls das Gesetz befolgen, dass ihre Gruppen sich aus je fünf solchen der vorhergehenden Involution zusammensetzen, so berechtigt uns diese Eigenschaft zu folgendem Schlusse:

Die Erweiterungen der drei Involutionsreihen, welche den Steiner'schen Polygonen von $2 \cdot 2^\alpha$, $2 \cdot 3^\beta$, $2 \cdot 5^\gamma$ Seiten entsprechen unter einander, sind unabhängig von der Reihenfolge der Ausführung und liefern alle Involutionen, die zu Steiner'schen Secantensystemen von $2 \cdot 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ Seiten gehören; diese Transformation ist also äquivalent einer Multiplication der Polygonseitenzahl resp. mit $2^\alpha$, $3^\beta$, $5^\gamma$.

## X. Ableitung und Transformation der Involutionsreihen für allgemeine Primzahlen.

36. Die Betrachtung der nächstfolgenden Involution knüpft sich an die Primzahl Sieben; und wieder würde sich hier zeigen, dass die Ecken eines degenerirten Polygons im vorigen Sinne ein Siebeneck bilden, d. h. dass die Tangente einer Ecke mit drei Verbindungslinien der sechs andern auf derselben Fläche liegen. Die 21 Verbindungslinien zwischen sieben solchen Punkten bilden drei Siebenseite, das genannte und seine beiden Diagonalsiebenseite. Die Projection der sieben Ecken aus einer Kegelspitze $M_i$ sind die vierzehn gemeinsamen Ecken von drei verschiedenen Polygonen, deren Seiten auf drei Flächen $V^{(14)}$ liegen, und durch deren Construction die Gesammtheit solcher reeller Siebenecke erhalten wird. Nachzuweisen bleibt jetzt, dass diese Doppelelemente einer neuen Flächeninvolution sich 24 Mal als Gruppen der Viererinvolution darstellen und vier Mal zu 24 in den Zusammenhang gebracht werden können, dass es je drei unter ihnen giebt, welche für alle ihre Polygone nur verschiedene Seiten, stets aber gemeinschaftliche Ecken haben, so dass wir vier Mal acht Gruppen von drei Flächen haben, deren Polygone sich für eine bestimmte Kegelspitze als ein Siebenseit und seine beiden Diagonalsiebenseite projiciren.

Die Regelschaaren auf diesen Flächen bilden Involutionen von der siebenten Ordnung und erzeugen einen Kegelschnitt, der in der Gegenebene $P_i$ des Punktes $M_i$ gelegen ist. Jede Ecke eines reellen Siebenecks ist dann gemeinschaftliche Ecke noch von sieben andern; die 42 neuen Flächen, die durch die Verbindungslinien und Tangenten aus diesen entspringen, haben mit allen Flächen, die aus dem reellen Siebeneck hervorgehen, die Eigenschaft gemein, sich zur Bildung Steiner'scher 14-Seite verwenden zu lassen. Daher haben alle sieben reellen Ecken dieselbe Eigenschaft, dass sich jene 42 neuen Punkte von ihnen aus in sieben Siebenecke gruppiren lassen. Jedes der acht Tripel von Flächen $V^{(14)}$ kann aber, wie das reelle, ein Ausgangssiebeneck liefern, und wir haben somit eine geschlossene Gruppe von $7^2$ Punkten, welche sich in 56 Siebenecke zusammenfassen lassen, je als acht Siebenecke mit gemeinschaftlicher Ecke und acht Mal als Siebenecke, welche alle 49 Punkte enthalten. Sie bestimmen durch ihre Tangenten und Verbindungslinien ein Element der Flächeninvolution 49. Ordnung des Vierzehnschlusses.

37. Bevor wir an den Nachweis der 24 Vierergruppen von Flächen $V^{(14)}$ treten, decken wir noch eine Eigenschaft der bis jetzt betrachten Flächeninvolutionen auf, deren wir in der Folge bedürfen.

Geht man von den fünf Punkten $A_1^{(1)} \dots A_5^{(1)}$ eines Fünfecks in einer Gruppe von 25 auf einer beliebigen Fläche weiter, abwechselnd auf Erzeugenden der einen und andern Schaar jedesmal bis zum Schnitt mit der Curve, so gelangt man zu einer Reihe von neuen Gruppen $A_1^{(i)} \dots A_5^{(i)}$. Zu der betrachteten Fläche gehören vier weitere der reellen einer Gruppe von 25; eine von diesen ist bestimmt durch die Verbindungsgerade $A_1^{(1)} A_2^{(2)}$. Die neuen Punktegruppen, die von derselben Ausgangsgruppe aus jetzt durch Fortschreiten auf dieser Fläche entstehen, sind offenbar identisch mit den vorigen, nur mit dem Unterschiede, dass in der ersten der abgeleiteten Gruppen eine, in jeder folgenden eine weitere cyklische Vertauschung der Elemente stattgefunden hat: so dass bei fünfmaligem Vorwärtsschreiten sich wieder dieselbe Anordnung,

wie in der Ausgangsgruppe vorfindet; analog für jede der drei andern Flächen der Gruppe, so dass die fünf Strahlen, welche von demselben Ausgangspunkte $A_k^{(1)}$ ausgingen, sich wieder im selben Endpunkte $A_k^{(6)}$ begegnen. Bildet man also diese Linienzüge von einer Gruppe von 25 Punkten aus auf 25 Flächen einer Gruppe, so tritt jedesmal nach fünf Seiten wieder dieselbe Anordnung ein, und weil die Involutionen, die zu den Combinationen der Potenzen von Drei und Fünf gehören, die characteristischen Eigenschaften bewahren, so gilt diese Beziehung für jede Zahl von der Form $3^\alpha \cdot 5^\beta$ und eine zu dieser gehörende Gruppe der Involution.

Wir besprechen die Besonderheiten, die für den Fall der Involutionen von der Ordnung $2^{2k}$ eintreten. Geht man von einem Punkte $A_1$ der $R_4$ auf den Flächen einer Vierergruppe weiter in dem genannten Sinne, so vereinigen sich jedesmal nach einer geraden Anzahl von Seiten diese wieder in einem einzigen Punkte. Ergänzt man den Punkt $A_1$ zu einer Vierergruppe und führt für diese die Operation aus, so gelangt man bei zweimaligem Vorgehen zu einer zweiten Vierergruppe, so dass jedem Punkte $A_i^{(1)}$ der ersten ein solcher $A_i^{(2)}$ der zweiten entspricht, zu dem man vom ersten aus auf allen vier Flächen gelangt. Erweitert man nun die Flächengruppe zu einer solchen von sechszehn Flächen, so treten dadurch drei neue Vierergruppen von Punkten auf, und erst die nochmalige Wiederholung des Verfahrens führt sie auf eine einzige Endgruppe von vier Punkten $A_i^{(2)}$ zurück, so dass jeder Punkt derselben vom entsprechenden der ersten Gruppe um vier Polygonseiten entfernt liegt. Die Erweiterung zu einer Flächengruppe von 64 giebt drei neue derartige Gruppen und die nochmalige Wiederholung des Processes eine einzige Endgruppe von vieren, von denen jeder um acht Polygonseiten vom entsprechenden der ersten Gruppe absteht. Diese Beziehungen beruhen auf dem Umstande, dass zwischen vier Untergruppen eines Elementes der Zusammenhang der Punkte einer Vierergruppe wiederholt wird, sie besitzen daher allgemeine Gültigkeit, so dass es stets ein Involutionselement von $2^{2k}$ Flächen giebt, welche alle gestatten, zwischen zwei gegebenen Punkten $A_1$

und $A_2$ ein Polygon von $2^k$ Seiten ihrer Erzeugenden einzuschalten.

Verbindet man nun die Schnittpunkte jeder Erzeugenden einer beliebigen Fläche des Büschels mit einem Punkte ihres B.-Quadrupels, so werden dadurch die Flächen involutorisch gepaart und es lässt sich leicht beweisen, dass die Verbindungslinien der beiden B.-Quadrupel jedes Paares stets Erzeugende derselben Vierergruppe bleiben, derjenigen nämlich, zu der das betrachtete Hyperboloid selbst gehört. Aus diesem Umstande folgt: Construirt man mit beiden Schaaren einer beliebigen Fläche einen fortlaufenden Linienzug $A_1 A_2 A_3 \ldots$, construirt man ihn sodann auf einer der vier Flächen, welche an Stelle des ersten Seitenpaares $A_1 A_2 A_3$, also zwischen $A_1$ und $A_3$ vier Seiten einzuschalten gestatten, so fällt jedes Mal nach vier Seiten eine Ecke des neuen Polygons mit einer Ecke $A_i$ von ungeradem oder geradem Index des alten zusammen, je nachdem man den neuen Linienzug mit der einen oder andern Schaar begonnen. Die Anwendbarkeit und Gültigkeit dieses Satzes auf das neue Polygon ist ebenso evident und er gilt daher unabhängig von der Anzahl von $4k$ Seiten, welche zwischen $A_1 A_3$ eingeschaltet werden. Ist die Zahl der Seiten $A_i A_{i+1}$ des ursprünglich gegebenen Polygons gerade, so geht man von der Schaar aus, welche alle ungeraden Ecken, also die Anfangs- und Endecke liefert; ist die Anzahl ungerade, so gelangt man mit der andern Schaar beginnend zur Endecke. Aber für die Zahlen $3^\alpha$ und $5^\beta$ ist gezeigt, dass zwischen zwei Punkten $A_1$ und $A_2$ sich $3^{2\alpha} \cdot 5^{2\beta}$ Polygone einschalten lassen und es gilt demnach der Satz:

Ist $m$ eine aus Potenzen der Primzahlen 2, 3 und 5 zusammengesetzte Zahl, so giebt es ein bestimmtes Element der Flächeninvolution von der Ordnung $m^2$ mit der Eigenschaft, dass auf jeder solchen Fläche ein Linienzug von $2m$ Seiten möglich ist, dessen Anfangs- und Endpunkt gegebene Punkte sind.

38. In Analogie mit dem Bisherigen gehen wir von einem Scheitel $S_1$ mit der Tangente durch die Kegelspitze $M_1$ aus; betrachten wir dann irgend einen variablen Punkt $P$ auf

der Curve, so giebt es neun Flächen, auf denen man mit drei Polygonseiten von $S_1$ zu $P$ gelangt; ebenso für $P'$ auf dem Strahle $M, P$. Liegen die Tangenten in $P$ und $P'$ ebenfalls auf einer der neun Flächen, so haben wir ein degenerirtes Polygon mit sechs Doppelseiten und sieben Doppelecken; also ein Siebeneck. Die Construction solcher Flächen schliesst sich daher genau an den Modus an, der für die Construction der Flächen $V^{(6)}$ und $V^{(10)}$ gegeben worden ist.

Im ersten Falle war eine einzige Linie zwischen $S_1$ und $P$ einzuschalten; den acht Punkten $P$ entspricht durch ihre Verbindung mit $S_1$ als Tangentialebenen eine Vierergruppe, und dem Paare von Ebenen an einer Tetraederkante durch $M_1$ nach den Punkten $P$ entsprechen die vier Paare nach den B.-Quadrupeln der genannten Vierergruppe. Wir haben somit innerhalb der Viererinvolution, aber auch innerhalb der Paare der Ebeneninvolution an der Tetraederkante ein 1—4-deutiges Entsprechen. Die zusammenfallenden fünf Paare ergaben die Gruppe der Kegelflächen und die vier Vierergruppen von Flächen $V^{(6)}$. Zur Construction des Zehnschlusses waren zwischen $S_1$ und $P$ zwei Seiten einzuschalten; es genügen vier Flächen dieser Bedingung mit sechszehn B.-Quadrupeln; somit existirt zwischen den Paaren der Ebeneninvolution ein 1—16-deutiges Entsprechen mit siebzehn zusammenfallenden Paaren; es ergaben sich die vorigen fünf Gruppen und zwölf Vierergruppen aus Flächen $V^{(10)}$.

In dem eben betrachteten Falle sind drei Linien zwischen $S_1$ und $P$ einzuschalten; es genügen neun Flächen dieser Bedingung mit 36 B.-Quadrupeln und die gesuchten Flächen entspringen somit aus den zusammenfallenden Paaren in einem 1—36-deutigen Entsprechen der Paare der Ebeneninvolution. Aus den 37 zusammenfallenden Paaren entstehen ausser der stets auftretenden Gruppe der Kegelflächen die vorigen zwölf Gruppen und 24 Gruppen von Flächen $V^{(14)}$. Von diesen Gruppen enthält jede eine solche, die wir direct suchen und die zur Spitze $M_1$ gehört; von den drei andern gehört jede zu einer andern Kegelspitze $M_i$, ist ebenfalls Fläche $V^{(14)}$ und wir können diese daher in vier Gruppen zu 24 so gruppiren, dass in jeder Gruppe alle diejenigen enthalten sind, die zur selben Kegel-

spitze $M_i$ und zur gleichen Gegenebene $P_i$ gehören. Damit ist gezeigt, dass jene Anordnung der 49 Punkte wirklich existirt; es folgt aber daraus sofort, dass für die Erweiterung dieser Involution in den schon bekannten der Satz des vorigen Art. fortbestehen bleibt.

39. Der Fortgang der Construction erfordert jetzt eine Einschaltung von vier Seiten zwischen $S_1$ und $P$ und ergiebt die gesuchten Flächen durch Construction der zusammenfallenden Paare in einem 1—64-deutigen Entsprechen der Involutionspaare. Unter den 64 Gruppen finden sich die 24 eben construirten; die andern 40 Gruppen sind die Flächen $V^{(18)}$, die wir schon auf anderem Wege gefunden. Die Einschaltung von fünf und sechs Seiten liefert im Weitern 60 Vierergruppen von Flächen $V^{(22)}$ und 84 solche von Flächen $V^{(26)}$. Wir schliessen daraus, dass die zu den Primzahlen 11 und 13 gehörenden Involutionen resp. von der Ordnung $11^2$ und $13^2$ sind und dass die Punktegruppen, aus deren Verbindung jene Involutionselemente entstehen, sich 12 Mal als 11 Elfecke resp. 14 Mal als 13 Dreizehnecke darstellen lassen, welche alle Punkte der Gruppe jedes Mal zugleich umfassen. Wir schliessen aber daraus auch auf den Fortbestand des im vorigen Art. abgeleiteten Satzes bei Erweiterung dieser Involutionen in den schon bekannten und auf den Fortbestand des Gesetzes der Transformation.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze leitet man aus den bereits bekannten Primzahlinvolutionen und allen ihren Combinationen die Involutionen aller folgenden Primzahlen ab.

Der Einschaltung von $k$ Linien zwischen den Punkten $S_1$ und $P$ entspricht die Construction der sich selbst entsprechenden Flächen für $2n = 4k + 2$. Sind die Involutionen bis zur Primzahl $p$ bekannt und ist $q$ die nächstfolgende, so erfordert dies eine Einschaltung von $\frac{q-1}{2} = k$ Linien; die zur Zahl $k$ gehörende Involution ist aber bekannt und es giebt daher $k^2$ Flächen, auf welchen das Polygon gezogen werden kann. Die $4k^2$ resultirenden liefern aber nicht nur die zur

Zahl $k$ gehörenden unter den sich selbst entsprechenden Flächen, sondern auch diejenigen für die Zahl $(k-1)$; diese werden in der Anzahl $4(k-1)^2$ erhalten, enthalten aber die Flächen für die Einschaltung $(k-2)$ u. s. f. Somit ist die Zahl der eigentlichen zur Zahl $k$ gehörenden Vierergruppen von Flächen $V^{(2q)}$

$$v = 4[k^2-(k-1)^2+(k-2)^2-(k-3)^2+\ldots] \quad \text{oder}$$

$$v = 4\sum_{k'=0}^{\frac{k-1}{2}}(4k'+1) = 2k(k+1) = 4\sum_{k'=0}^{\frac{k-2}{2}}(4k'+3)$$

für ungerades resp. gerades $k$. Diese Zahl $v$ wird für $k=\frac{q-1}{2}$ zu $\frac{q^2-1}{2}$ und es folgt daraus, dass die Ordnung der neu construirten Involution $q^2$ ist.

Wir bestätigen dieses Ergebniss durch Zusammenstellen der bis jetzt direct aufgestellten Involutionen. Schreiben wir in der ersten Horizontal-Reihe die Werthe der Zahlen $k$, in der zweiten die Seitenzahl der gesuchten Polygone, in der dritten die Seitenzahl der Polygone auf den Flächen, welche der Einschaltung entsprechen, in der vierten die Ordnung dieser Involution und in der letzten die Anzahl der eigentlichen Vierergruppen von sich selbst entsprechenden Flächen, so ergiebt sich folgendes Schema:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $k$ | $\frac{n-1}{2}$ |
| 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | $4k+2$ | $2n$ |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | $4k$ | $2(n-1)$ |
| 4 | 16 | 36 | 64 | 100 | 144 | $4k^2$ | $(n-1)^2$ |
| 4 | 12 | 24 | 40 | 60 | 84 | $2k(k+1)$ | $\frac{n^2-1}{2}$ |

Geben wir zunächst $k$ solche Werthe, dass wir für $n$ alle Primzahlen erhalten, so lässt sich jede dieser Involutionen

aus einer schon bekannten Involution oder einer Combination aus solchen ableiten. Die Doppelelemente $V^{(2p)}$ der Involution stellen sich dar als $\frac{p^2-1}{2}$ Gruppen zu vier; wir können sie aber auch in vier Gruppen von je $\frac{p^2-1}{2}$ Flächen ordnen, so wie sie zu den Tetraederecken gehören. Jedes $2p$-Seit einer solchen Fläche wird aus der zugehörenden Tetraederecke doppelt projicirt; seine Ecken erscheinen dabei als Ecken eines $p$-Ecks, wobei eine solche Gruppe von $p$ Punkten die Eigenschaft besitzt, dass von diesen stets $\frac{p-1}{2}$ paarweise durch ebensoviele Geraden verbunden werden können, welche mit der Tangente im letzten derselben auf der nämlichen Fläche liegen; die durch die $p$ Tangenten bestimmten Flächen sind also dieselben, wie die durch die $\frac{p(p-1)}{2}$ Verbindungsgeraden bestimmten; woraus folgt, dass die Schmiegungsebenen in den $p$ Ecken der Raumcurve zum zweiten Mal in den $p$ Punkten eines neuen $p$-Ecks begegnen, so dass ein $p$-Eck durch zwei seiner Ecken vollständig bestimmt ist.

Die $\frac{p(p-1)}{2}$ Verbindungsgeraden zwischen den Ecken eines $p$-Ecks bestimmen ein $p$-Seit und $\frac{p-3}{2}$ Diagonal-$p$-Seite desselben. In jeder der vier Gruppen von $\frac{p^2-1}{2}$ Flächen $V^{(2p)}$ haben somit $\frac{p-1}{2}$ die Eigenschaft, dass sich ihre $2p$-Seite als Ecken und Seiten eines einzigen $p$-Ecks und seiner Diagonal-$p$-Seite aus der zugehörigen Kegelspitze projiciren. Somit giebt es $(p+1)$ Flächen in jeder Gruppe, welche zu verschiedenen $p$-Ecken führen und jeder Punkt der $R_4$ ist demnach gemeinschaftliche Ecke von $(p+1)$ $p$-Ecken. Die durch die Tangenten und Verbindungslinien dieser $p$-Ecke gebildeten Flächengruppen haben alle eine Fläche gemein und somit alle unter sich die Eigenschaft, dass sich ihre Erzeugenden zu einer Folge Steiner'scher $2p$-Seite zusammenfügen. Daraus folgt, dass die $p^2$ so gebildeten Punkte eine geschlossene Gruppe bilden, die sich von jedem ihrer Punkte aus als $(p+1)$

$p$-Ecke darstellen lässt. Es entstehen somit $p(p+1)$ solcher $p$-Ecke, die sich $(p+1)$ Mal zu $p$ so zusammenfassen lassen, dass sie alle $p^2$ Punkte enthalten.

Im Falle der zweitheiligen $R_4$ ist von diesen $p$-Ecken ein einziges reell; es zeigt, dass jede Fläche mit $(p-1)$ andern combinirt werden kann, welche auf ihr dieselbe Involution der Regelschaaren bestimmen, und ihre Bestimmung aus den Gruppen mit Doppelstrahlen oder degenerirten Polygonen erweist, dass sich zwei Gruppen der Involution $p^{\text{ter}}$ Ordnung als $p$ Paare einer quadratischen Involution darstellen. Im Bilde sind die Ecken der degenerirten Polygone die Bilder der B.-Quadrupel der Flächen; je zwei von ihnen, welche nicht zu einem Quadrupel gehören, haben also die Eigenschaft von F.-Punkten; ihre Verbindungslinien schneiden sich aber zu $\frac{p-1}{2}$ mit den Tangenten in $p$ neuen Punkten der $C_3$, von denen wieder irgend zwei die Eigenschaft von F.-Punkten haben. Wir schliessen daraus, dass auch das Tangential-$p$-Seit dieselben Eigenschaften besitzt, wie das ursprüngliche, oder dass das schon bekannte räumliche Gesetz der doppelten Erzeugung der Flächeninvolution des $2p$-Schlusses existirt.

Bestimmt man nun $p^2$ Gruppen $G_i$ von $p^2$ Punkten, die unter sich den Zusammenhang von $p^2$ Punkten einer Gruppe selbst wiederholen, so haben $p$ unter diesen Gruppen je ein reelles $p$-Eck und diese $p$ $p$-Ecke haben denselben Zusammenhang, wie die $p$ Ecken eines rellen $p$-Ecks selbst. Es lässt sich aus ihrer Betrachtung nachweisen, dass die neue Involution Polygone von $2p^2$-Seiten und Ecken liefert. Jede Fläche lässt sich mit $p^2(p^2-1)$ andern combiniren, je $p(p-1)$ derselben ergeben dieselbe Involution der Regelschaaren, so dass nur $p(p+1)$ von einander verschiedene auftreten. Die Zahl der eigentlichen Doppelelemente dieser Involution von der Ordnung $p^4$ ist $p(p+1)[2(p^2-1)-2(p-1)] = 2p^2(p^2-1)$, welche Zahl auch die Anzahl der Flächen $V^{(2p^2)}$ angiebt; sie wird durch $2(p^2-1)$ Doppelelemente der vorhergehenden Involution auf die Zahl von $2(p^4-1)$ ergänzt. Fasst man sodann diese $p^4$ Punkte als neue Gruppe $G$ und construirt die

fehlenden $p^2-1$ Gruppen $G_i$, so ist die neue Involution von der Ordnung $(p^3)^2$ und die $k$-malige Wiederholung ergiebt somit die Involution des $2p^{k+1}$-Schlusses.

40. Seien nun $p$ und $q$ zwei beliebige Primzahlen mit den entsprechenden Punkt- und Flächeninvolutionen des $2p$- und $2q$-Schlusses. Bezeichnen wir die Punkte der ersten Gruppe selbst mit $p$, die der zweiten mit $q$, so sind die Punkte der ersten Gruppe von irgend einem derselben aus darstellbar als $(p+1)$ $p$-Ecke. Ergänzen wir nun jeden Punkt eines solchen $p$-Ecks, aufgefasst als Punkt $q$ zum $q$-Eck, so ist zunächst zu zeigen, dass durch Festsetzung eines einzigen solchen $q$-Ecks an der Ausgangsecke des $p$-Ecks für alle seine $(p-1)$ weitern Ecken ein ganz bestimmtes $q$-Eck fixirt ist. Jene $q$ Punkte des ersten $q$-Ecks bestimmen eine Gruppe von $q$ Flächen und weil diese die durch die Tangente der Ausgangsecke bestimmte Fläche enthält, so folgt daraus: Zieht man durch jeden der $(p-1)$ Punkte des $p$-Ecks die $q$ Erzeugenden dieser Flächengruppe, so bilden ihre Schnittpunkte mit der $R_4$ eine neue Gruppe von $q$ Punkten, von denen jede einen Punkt des $p$-Ecks enthält. Wir haben also jetzt $p$ ganz bestimmte $q$-Ecke, jedes mit einem Punkt $p$ als Ecke; es giebt daher $(q-1)$ Verbindungsgerade zwischen zwei solchen $q$-Ecken, welche mit der Verbindungslinie der beiden Ecken $p$ auf derselben Fläche liegen; nun giebt es aber $\frac{p-1}{2}$ solcher Verbindungslinien auf jeder der $p$ Flächen, somit ordnen sich die $p$ Gruppen von $q$ Punkten $p$ Mal in $\frac{p-1}{2}$ Paaren derart, dass von den $q$ Flächen ihrer Verbindung die eine jeweilen eine Fläche der Gruppe von $p$ ist, zu der die Fläche des Ausgangspunktes gehört.

Somit sind jene $\frac{p-1}{2}$ Gruppen von $q$ Flächen ein- und dieselbe Gruppe, welche durch das $q$-Eck des betreffenden Punktes $p$ bestimmt ist. Es haben also die $p$ Gruppen von $q$ Punkten unter sich selbst genau den Zusammenhang, wie die $p$ Punkte des $p$-Ecks selbst.

Verbindet man jetzt den Punkt $p$ einer beliebigen Gruppe

von $q$ Punkten mit einem andern dieser Gruppe, so bestimmt diese Gerade eine der $q$ Flächen dieser Gruppe und daher giebt es durch jeden der $(p-1)$ andern Punkte eine Gerade dieser Fläche nach einem bestimmten Punkt einer andern Gruppe. Diese neuen Punkte bilden demnach wieder ein $p$-Eck; den Punkt $p$ kann man mit $(q-1)$ andern seines $q$-Ecks verbinden und gelangt demnach zu $(q-1)$ andern $p$-Ecken. Damit ist erwiesen, dass die $p$ Gruppen von $q$ Punkten auch $q$ Gruppen von $p$ Punkten sind, oder dass die Umkehrung der Transformation für zwei Primzahlen sowohl für die Involutionen der Flächen wie ihrer Regelschaaren stattfindet.

Dieser Satz gestattet aber jetzt nach dem früher zur Anwendung gekommenen Verfahren der Hülfsfläche den Schluss, dass zwei solche Flächen aus verschiedenen Gruppen von $p$ und $q$ Regelschaaren besitzen, die in projectivische Involutionen von der Ordnung $p.q$ geordnet sind, welche sich zu Sekantenpolygonen von $2pq$-Seiten zusammenfügen.

Die $(pq)^2$ Punkte einer so combinirten Gruppe haben analogen Zusammenhang, wie die Punkte einer Partialgruppe von $p^2$ und $q^2$ selbst. Jeder Punkt bestimmt zunächst eine Gruppe von $p^2$ und eine solche von $q^2$ Punkten. Die ersten lassen sich als $(p+1)$ $p$-Ecke, die andern als $(q+1)$ $q$-Ecke darstellen. Ordnet man einem beliebigen der $p$-Ecke ein beliebiges $q$-Eck zu, so ist diese Zuordnung für alle $p^2$ Punkte bestimmt; sie ordnet die $(pq)^2$ Punkte von jedem derselben aus in $(p+1)(q+1)$ Gruppen von $pq$ Punkten; diese sind $p$ $q$-Ecke und $q$ $p$-Ecke, $(p-1)(q-1)$ unter ihren gehören mit dem Ausgangspunkt weder zu einer Gruppe von $p^2$ noch $q^2$; da sich dies $(p+1)(q+1)$ Mal wiederholt, so ist die Anzahl dieser Punkte $(p^2-1)(q^2-1)$, wie nothwendig.

Die $pq$ Punkte selbst haben also alle Eigenschaften, nach welchen wir sie als ein $pq$-Eck bezeichnen können. Dabei ist für $p$ und $q$ der Werth 2 ausgeschlossen. Ist die Zahl $p=q$, so ergiebt dies Verfahren die Bestimmung der Punktegruppen von $p^4$ Elementen oder ist die Ableitung

aller Involutionen für Primzahlpotenzen aus der Involution für diese Primzahl selbst.

Ist also $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots.$ wo $p, q, r$ die Primfactoren der Zahl $n$, so kommt die Construction der Involution des $2n$-Schlusses auf die Construction der Involution für den $2p$, $2q$, $2r\ldots$ Schluss hinaus.

Dieselben constructiven Mittel nämlich, welche diese Involutionen ergeben, führen auch auf diejenigen für die Zahlen $2p^\alpha$, $2q^\beta$, $2r^\gamma$ u. s. f. und die von der Reihenfolge unabhängige successive Erweiterung dieser Involutionen untereinander führt auf die Involution des $2n$-Schlusses von der Ordnung $n^2$.

41. Wir sprechen die Consequenzen dieser räumlichen Beziehungen zunächst für die Centralprojection der $R_4$ als Curve dritter Ordnung aus. Diejenigen Punkte $F$ der $C_3$, welche paarweise F.-Punkte sein können für den $2p$-Schluss, bilden auf dieser eine Involution von der Ordnung $p^2$. Die $p^2$ Elemente jeder Gruppe ordnen sich in $p\,(p+1)$ $p$-Ecke (mit je $\frac{p-3}{2}$ Diagonal-$p$-Seiten), die sich $p$ Mal in der Anzahl $(p+1)$ mit einer gemeinschaftlichen Ecke und $p$ Mal zu $p$ so gruppiren lassen, dass sie alle $p^2$ Punkte umfassen. Je $\frac{p-1}{2}$ Verbindungslinien zwischen den $p$-Ecken schneiden sich mit der Tangente des letzten im selben Punkt der $C_3$.

Die so entstehende Tangentialgruppe bildet ein neues $p$-Eck und die sämmtlichen Verbindungsgeraden zwischen allen $p^2$ Punkten bestimmen eine neue Gruppe von $p^2$ solchen, die Tangentialgruppe der ersten. Diese Beziehung ist in specieller Form der Satz, dass die sämmtlichen Verbindungsgeraden zwischen zwei Gruppen $P$ und $P'$ zu einer dritten Gruppe $F$ führen; und dieser der abgekürzte Ausdruck für eine Reihe von $2p$-Seit-Constructionen.

Je ein $p$-Eck der ersten Gruppe bildet mit einem solchen der zweiten die geraden und ungeraden Ecken von $\frac{p(p-1)}{2}$ Steiner'schen $2p$-Seiten, für die Paare eines $p$-Ecks der Gruppe $F$ als F.-Punkte. Durch Construction sämmtlicher Polygone an diesen kann man daher

alle unendlich vielen Polygone derselben Art ableiten. An jedem Punkte $F$ entstehen daher $(p+1)$ verschiedene Involutionen $p$. Ordnung, die vier degenerirten Polygone bilden die $2(p-1)$ Doppelelemente derselben. Jede dieser Involutionen ist so beschaffen, dass zu jeder Gruppe von $p$ Strahlen eine zweite gehört, die sich mit dieser in $p$ Paare einer der drei quadratischen Involutionen auflöst, so dass das Gesammterzeugniss zweier solcher Involutionen zerfällt in die $C_3$, in $\frac{p-3}{2}$ Curven $C_4$ mit Doppelpunkten in den F.-Punkten und einen Kegelschnitt $K$ durch diese. Damit ist also jedes Mal die Aufgabe zugleich gelöst, eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten zu construiren, der sich Steiner'sche Polygone einzeichnen lassen.

Die entsprechenden Gruppen beider projectivischen Involutionen begegnen sich in Punktegruppen einer Involution $p$. Ordnung auf einem Kegelschnitt $K$, für welche die Punkte $F$ zur nämlichen Gruppe gehören; je zwei Gruppen von $p$ Punkten liegen für einen bestimmten Punkt seiner Ebene perspectivisch.

Dem Scheitelstrahl entspricht in beiden Involutionen die Gruppe nach den $p$ Ecken des $p$-Ecks, zu welchem die F.-Punkte gehören; die weitern Ecken dieses besondern $2p$-Seits werden von den Tangentialpunkten der $F$ gebildet. Die Verbindungslinie der F.-Punkte sondert sich ab, es bleiben noch $(p-1)$ Seiten durch jeden derselben, von denen die eine seine Tangente. Bezeichnen wir die F.-Punkte mit $P$ und $Q$, die Tangentialpunkte resp. mit $P_1$ und $Q_1$; es schneide dann die Gerade $PQ_1$ die $C_3$ in $P_2$, und $QP_1$ die $C_3$ in $Q_2$, so sind dies zwei Punkte der Gruppe der $F$; verbindet man also wieder $P$ mit $Q_2$ und $Q$ mit $P_2$ und setzt dies Verfahren fort bis zu den Punkten $P_{p-1}$, $Q_{p-1}$, so schneiden sich die Geraden $PQ_{p-1}$ und $QP_{p-1}$ im selben Punkte $T$ der Curve.

Dies ist die Erweiterung des Kennzeichens für zwei Punkte als F.-Punkte, die Steiner für die Zahlen 2, 3 und 5 gegeben hat.

Aus der Kenntniss zweier reellen F.-Punkte folgt diejenige aller reellen $p$-Ecke; zur Construction aller $p^2$ Punkte ist ein Paar von Punkten eines zweiten $p$-Ecks erforderlich. Sie ergänzen jedes der beiden Paare zum $p$-Eck, dann bestimmt jede Ecke der ersten mit jeder der zweiten ein $p$-Eck; jede Ecke ist gemeinsame von $(p+1)$ solchen, wir erhalten also die Gruppe $p$ Mal; aus ihr sind alle übrigen Gruppen der Involution ableitbar.

Betrachten wir das reelle $p$-Eck einer Gruppe als seinen Repräsentanten, so erfordert der Uebergang zur Involution für die Zahl $p^2$ die Ergänzung eines reellen $p$-Ecks zu einer Gruppe von $p$ solchen, mit Wiederholung des Zusammenhanges wie zwischen den $p$ Ecken eines $p$-Ecks. Ihre Construction gestaltet sich folgendermassen: Man gehe von dem gegebenen $p$-Eck zu seinem Tangential-$p$-Eck über, dann sind zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ecken der ersten in bestimmter Weise $(p-1)$ Punkte einzuschalten und für irgend zwei Punkte des Tangential-$p$-Ecks als F.-Punkte von diesen aus das $2p$-Seit darzustellen. Die Construction jener $(p-1)$ eingeschalteten Punkte erfolgt aber mit denselben Mitteln, mit denen das erste $p$-Eck construirt wurde; aus der Kenntniss zweier solcher Gruppen von $p^2$ Punkten ist dann die ganze Gruppe von $p^4$ Punkten bestimmt. Wir können also in der Folge die F.-Punktegruppen des $2p^\alpha$-Schlusses als mit denjenigen des $2p$-Schlusses bestimmt voraussetzen.

Von diesen Primzahlinvolutionen führt zu denjenigen für die allgemeine Zahl $n$ der Satz:

Die Transformation der Involutionen für die Zahlen $p^\alpha$ und $q^\beta$ in einander liefert die Involution für die Zahl $p^\alpha . q^\beta$, ist also äquivalent einer Multiplication der Polygonseitenzahl mit diesen Factoren resp.

Die Gruppe von $p^{2\alpha} . q^{2\beta}$ Punkten stellt sich dar als eine bestimmte Anzahl von $p^\alpha . q^\beta$-Ecken, deren sämmtliche Verbindungslinien und Tangenten der $C_3$ in Punkten einer analogen Gruppe begegnen. Daraus folgt, dass für jede und beliebig oft wiederholte Transformation, also für die allgemeine Zahl $n$ die Eigenschaften der Primzahlinvolutionen fortbestehen bleiben.

Es bleibt also insbesondere auch die Bedingung, welche zwei Punkte als F.-Punkte charakterisirt, in derselben Form fortbestehen. Für $p = 2$ lässt sich diese Transformation leicht durch eine geometrische Construction veranschaulichen und da dies geschieht, indem man aus den Tangentialpunkten der gegebenen Gruppe die je noch möglichen drei Tangenten zieht, so haben wir für diesen Fall den Satz, den Steiner an den Anfang seiner Mittheilung gestellt hat.

Die $k$-malige Wiederholung des dadurch ausgedrückten Verfahrens ist äquivalent einer Multiplication mit $2^k$; sie giebt neben allen andern Primzahlen zu Punktegruppen besonderer Art Veranlassung, nämlich zu solchen, deren vier Partialgruppen dieselbe gemeinschaftliche Tangentialgruppe besitzen.

42. Die Transformation der Involution für die Zahl $p$ in derjenigen für die Zahl $q$ giebt Punktegruppen von $(pq)^2$ Elementen. Es frägt sich nun, wie viele Punkte von diesen kann man mit einem beliebigen unter ihnen als F.-Punktepaar für die Zahl $(pq)$ combiniren? Der betrachtete Punkt bestimmt eine Gruppe von $p^2$ und eine solche von $q^2$, welche die Bedingung nicht erfüllen. Es bleiben somit $(p^2-1)(q^2-1)$ solche. Hätten wir $(p^2)^2$ Punkte genommen, so blieben $(p^2-1)$ Gruppen von $p^2$ Punkten, zu denen der Ausgangspunkt nicht gehört; somit ergiebt die Erweiterung $(p^2-1)p^2(q^2-1)$ Punkte als combinirbare; und allgemein, wenn die erste Gruppe $(p^\alpha)^2$ Punkte enthält, $(p^2-1)(p^2)^{\alpha-1}(q^2-1)$ solche. Dieselbe Betrachtung bleibt aber gültig, wenn statt $q^2$ jetzt $(q^\beta)^2$ Punkte genommen würden; somit wird die Anzahl der möglichen Paare $(p^2-1)(q^2-1)p^{2(\alpha-1)}q^{2(\beta-1)}$. Ist also allgemein $n = p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots$, so ist die Anzahl derjenigen Punkte, die mit einem gegebenen F.-Punkte für den $2n$-Schluss sein können, für $p$, $q$, $r$ als beliebige Primzahlen, den Factor 2 nicht ausgeschlossen, gegeben durch die Zahl:

$$n_f = (p^2-1)(q^2-1)(r^2-1) \ldots\ldots p^{2(\alpha-1)} q^{2(\beta-1)} r^{2(\gamma-1)} \ldots\ldots$$

Dies ist auch die Anzahl der Flächen, welche im Raume mit einer beliebigen Fläche combinirt werden können; $2n_f$ somit die

Anzahl derjenigen Doppelelemente aller ihrer Involutionen, welche nicht zugleich Doppelelemente der Partialinvolutionen sind, also auch gleich der Anzahl $n_v$ der eigentlichen $2n$-Schlussflächen $V^{(2n)}$; so dass

$$n_v = 2 \,.\, n_f = 2(p^2-1)(q^2-1)(r^2-1)\ldots . p^{2(\alpha-1)} q^{2(\beta-1)} r^{2(\gamma-1)} \ldots .$$

Setzen wir an Stelle von $p^2$, $q^2$, $r^2$ ... jedesmal $p$, $q$, $r$ ..., so haben wir in jeder Gruppe die Anzahl der (reellen) Hyperboloide. Diese Anzahl ist aber nach der Entwicklung gleichzeitig die Anzahl derjenigen Flächen, welche auf der betrachteten die Regelschaarinvolution ungeändert lassen; die Anzahl der verschiedenen Involutionen $n_i$ in die Anzahl ihrer eigentlichen Doppelelemente $n_d$ muss aber die Zahl der sich selbst entsprechenden Flächen geben, weil diese durch die projicirenden Ebenen jener als Tangentialebenen bestimmt sind; man hat somit $n_i \,.\, n_d = n_v$, also

$$n_i = (p+1)(q+1)(r+1)\ldots p^{\alpha-1} \,.\, q^{\beta-1} \,.\, r^{\gamma-1} \ldots,$$
$$n_d = 2 \,.\, (p-1)(q-1)(r-1)\ldots p^{\alpha-1} \,.\, q^{\beta-1} \,.\, r^{\gamma-1} \ldots .$$

Diese Formeln können leicht an den im Anfang direct bestimmten Zahlen durch folgende Tabelle bestätigt werden:

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 4 | 6 | 6 | 12 | 8 | 12 | 8 | 18 | 12 | 24 | 14 | 24 | 24 |
| $n_d$ | 2 | 4 | 4 | 8 | 4 | 12 | 8 | 18 | 8 | 20 | 8 | 24 | 12 | 16 |
| $n_v$ | 6 | 16 | 24 | 48 | 48 | 96 | 96 | 144 | 144 | 240 | 192 | 336 | 288 | 384 |

Ist die Involution $n$. Ordnung an den F.-Punkten ungerader Ordnung, so treten im Erzeugniss nebst der $C_3$ ein Kegelschnitt $K$ und $\frac{n-3}{2}$ Curven $C_4$ auf; ist $n$ gerade, so setzt sich jede Gruppe aus $\frac{n}{2}$ Paaren einer quadratischen Involution zusammen und das Erzeugniss besteht nebst der $C_3$ aus $\frac{n-2}{2}$ Curven $C_4$. Aus jeder Verergruppe von Flächen $V^{(2n)}$ entspringt eine Regelfläche $R^{(8)}$; diese projicirt sich als Curve

sechster Classe; somit umhüllen die sämmtlichen Verbindungslinien der Paare von F.-Punkten für den $2n$-Schluss $\frac{n_v}{4}$ Curven sechster Classe. Die Flächen $R^{(8)}$ sind Träger geschlossener Sekantensysteme von $n$ Seiten und besitzen die Umrisskegel aus den Ecken $M_i$ an die Flächen $V^{(2n)}$ zu doppelt umschriebenen Developpablen; die Ecken ihrer Polygone bestimmen an den Kanten des Tetraeders Ebeneninvolutionen $n$. Ordnung $\mathfrak{P}_i^{(n)}$, die ebenfalls zur Construction der Punktegruppen und ihrer Erweiterungen verwendbar sind.

## XI. Die merkwürdigen Punktsysteme von Clebsch. — Geschlossene Tangentenpolygone.

43. Wir fügen zu den Systemen erster und zweiter Art, welche wir bei der Darstellung der Involutionen für die Zahlen Zwei und Drei abgeleitet haben, mit ihren Erweiterungen in den allgemeinen Involutionen solche Systeme dritter Art hinzu, welche nur einen Wendepunkt enthalten und zunächst in einfachster Form aus der Darstellung einer Gruppe von $p^2$ Punkten von einem Wendepunkte aus erhalten werden. Die neun Systeme dritter Art aus $p^2$ Punkten lassen sich vom Wendepunkte aus $(p+1)$ Mal als $p$-Ecke darstellen; jedes dieser $p$-Ecke ist aber ein geschlossenes Tangentenpolygon von $(p-1)$ Seiten, aus welchem sich der Wendepunkt ausgesondert hat; somit ist die Zahl dieser Polygone $9.(p+1)$. Jede Tangente des Systems geht noch durch einen Punkt desselben; durch $(p^2-1)$ Punkte gehen $\frac{p^2-3}{2}$ Gerade, welche drei Punkte desselben enthalten, durch den Wendepunkt $\frac{p^2-1}{2}$. Diese neun Gruppen dritter Art bilden zusammen eine Gruppe erster Art; je drei solcher Gruppen, die aus drei Wendepunkten in gerader Linie entspringen, liegen selbst zu einander perspectivisch.

Erweitern wir nun in der Involution der Zahl $p^\alpha$, so lässt sich die Darstellung vom Wendepunkte aus als $(p+1)$ Gruppen von je $p$ Gruppen mit $p^{2(\alpha-1)}$ Elementen festhalten. Lassen wir die $p^\alpha$ Punkte, zu denen der Wendepunkt gehört, weg, so

haben wir noch $(p-1)$ Gruppen von je $p^{2(\alpha-1)}$ Elementen. Die Tangentialgruppe einer ersten ist identisch mit einer zweiten, die Tangentialgruppe dieser eine dritte Gruppe u. s. f., so dass wir nach $(p-1)$maliger Ausführung dieser Operation durch alle Gruppen hindurch zur ersten zurückkehren, wobei diese Gruppen genau den Zusammenhang eines Tangentenpolygons von $(p-1)$ Seiten befolgen. In jeder Gruppe giebt es $p^{\alpha-1}$ reelle Elemente; der Tangentialpunkt eines Elementes der ersten Gruppe ist ein Element der zweiten, der neue Tangentialpunkt ein Element der dritten Gruppe u. s. f., schliesslich kommen wir zur ersten Gruppe, nicht aber zum Ausgangspunkt zurück, weil sonst das Tangentenpolygon $(p-1)$ Seiten enthielte und somit die Gruppe den Wendepunkt enthalten müsste. Vielmehr schliesst sich das Polygon erst, nachdem der Umgang $p^{\alpha-1}$ Mal vollzogen ist, so dass wir ein geschlossenes Tangentenpolygon von $p^{\alpha-1}(p-1)$ Seiten haben; aus allen Gruppen entstehen $p^{\alpha-1}$ solcher Polygone und weil die ganze Darstellung vom Wendepunkt aus $(p+1)$ Mal möglich ist, so ist die Zahl der Polygone $(p+1)p^{\alpha-1}$. Die Zahl ihrer Ecken ist $(p^2-1)p^{2(\alpha-1)}$; dazu kommt die Gruppe mit dem Wendepunkt, also $p^{2(\alpha-1)}$ weitere Punkte, für welche sich übrigens genau derselbe Zusammenhang bezüglich der Zahl $(\alpha-1)$ wiederholt. Und wieder setzen sich diese neuen Systeme zu einem solchen erster Art zusammen.

Nehmen wir jetzt eine Gruppe von $(pq)^2$ Punkten, zu welcher der Wendepunkt gehört, so lassen sich diese $(p+1)(q+1)$ Mal als $pq$-Ecke darstellen, wobei aber $(p^2-1)$ Punkte $q$ Mal und $(q^2-1)$ Punkte $p$ Mal, ihr gemeinsamer Punkt $(p+1)$ Mal für $(q+1)$ und $(q+1)$ Mal für $(p+1)$ Punkte gezählt wurde. Wird diese Darstellung vom Wendepunkt aus vollzogen, so bleiben nach Absonderung des $p$- und $q$-Seits, zu dem er gehört, für jede Darstellung $(p-1)(q-1)$ Punkte als Ecken eines geschlossenen Tangentenpolygons; die Anzahl derselben ist $(p+1)(q+1)$.

Wir setzen jetzt an Stelle von $p$ Punkten $p^2$ solche, so haben wir $(p+1)$ Mal eine Darstellung von $(p-1)$ Gruppen mit $p^2$ Punkten. Ergänzt man nun den Wendepunkt zu einem bestimmten $q$-Eck und ebenso jeden der $p^2$ Punkte einer Gruppe von $p^2$ zu einem solchen, welches durch Festsetzung des ersten

$q$-Ecks fixirt ist, so gelangt man zu $(p-1)p^2(q-1)$ neuen Punkten. Die Zahl der reellen Elemente jeder der $(p-1)$ Gruppen ist $p(q-1)$, somit entsteht ein geschlossenes Tangentenpolygon von $(p-1)p(q-1)$ Seiten. Ihre Anzahl ist für jede Darstellung durch $p$ und somit im Ganzen durch $(p+1)p(q+1)$ gegeben.

Hat man Gruppen von $(p^\alpha)^2$ Punkten, so hat man $(p+1)$ Mal $(p-1)$ Gruppen von $p^{2\alpha}$ Punkten, man erhält durch Ergänzung zum $q$-Eck neue Punkte in der Anzahl $(p-1)(q-1)p^{2\alpha}$; reell sind $(p-1)(q-1)p^\alpha$; sie bilden ein Tangentenpolygon von ebenso vielen Seiten; ihre Gesammtzahl ist $(p+1)(q+1)p^\alpha$.

Setzen wir an Stelle von $q$ Punkten $q^2$ solche, so haben wir nach unserer Darstellung $(p-1)$ Gruppen von $p^{2\alpha}$ Punkten und $(q-1)$ Gruppen von $q^2$ Punkten. Die Ergänzung geschieht folgendermassen: Wir suchen zu den $p^{2\alpha}$ Gruppen $(q-1)$ andere, so dass wir $q$ Gruppen von $p^{2\alpha}$ Punkten haben und ergänzen jetzt wieder jeden Punkt einer Gruppe von $p^{2\alpha}$ zu $q^2$ Punkten. Neue Punkte treten auf in der Anzahl $(p-1)(q-1)p^{2\alpha}.q^2$. Reell sind $(p-1)(q-1)p^\alpha.q$, welche die Ecken eines Tangentenpolygons bilden; deren Anzahl insgesammt $(p+1)(q+1)p^\alpha.q$ ist.

Dies Verfahren bleibt im Wesentlichen dasselbe, wenn $q^2$ durch $q^{2\beta}$ ersetzt wird. Aus jeder der neun Gruppen mit $p^{2\alpha}.q^{2\beta}$ Punkten, welche einen Wendepunkt enthalten, treten somit geschlossene Tangentenpolygone von $(p-1)(q-1)p^{\alpha-1}.q^{\beta-1}$ Seiten in der Anzahl $(p+1)(q+1)p^{\alpha-1}q^{\beta-1}$ auf. Diese Formel giebt für $p^\alpha = q^\beta$ die schon gefundene für $(p^{2\alpha})^2$ Punkte. Ist also $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, wobei ausdrücklich die Primzahlen 2 und 3 ausgeschlossen werden müssen, so giebt es neun S y s t e m e v o n $n^2$ P u n k t e n d r i t t e r A r t, welche wir kurz beschreiben:

Zu dem System gehören die $(n^2-1)$ Tangenten in den Punkten, welche vom Wendepunkt verschieden sind. Durch jeden Punkt von diesen gehen $\frac{n^2-3}{2}$ Gerade, welche noch ein Paar von Punkten enthalten, durch den Wendepunkt selbst $\frac{n^2-1}{2}$. Das System enthält $\frac{(n^2-1)(n^2-2)}{6}$ Gerade durch drei seiner Punkte. Es wird gebildet von geschlossenen Tangentenpolygonen mit

$$(p-1)(q-1)(r-1)\ldots p^{\alpha-1}.q^{\beta-1}.r^{\gamma-1}\ldots \text{ Seiten,}$$

in der Anzahl

$$(p+1)(q+1)(r+1)\ldots p^{\alpha-1}.q^{\beta-1}.r^{\gamma-1}.$$

Man bemerkt, dass diese Zahlen mit $\frac{n_d}{2}$ und $n_i$ resp. übereinstimmen, oder dass die von den Tangentenpolygonen gebildeten Ecken gerade die Punkte sind, welche mit einem Wendepunkt F.-Punktepaare bilden für den $2n$-Schluss, mit den acht andern solche für den $6n$-Schluss.

Die neun Punktsysteme dritter Art zusammen bilden ein solches erster Art von $(3n)^2$ Punkten; zwölf Mal drei Partialgruppen desselben unter ihnen sind perspectivisch gelegen. Es enthält die geschlossenen Tangentenpolygone der eben betrachteten Systeme; $n^2-9$ Punkte sind Tangentialpunkte eines andern Systempunktes, deren Tangenten selbst wieder einen solchen Punkt enthalten. Durch jeden dieser Punkte gehen $\frac{n^2-3}{2}$ Gerade, nach Paaren des Systems, im Ganzen giebt es $\frac{(n^2-3)(n^2-9)}{6}$ Gerade, welche drei Systemspunkte enthalten, durch jeden Wendepunkt $\frac{n^2-1}{2}$ derselben. Es ist zu bemerken, dass die jedesmal noch fehlenden Punkte der neun Systeme ein analoges System erfüllen für die Zahlen $(\alpha-1), (\beta-1), (\gamma-1)\ldots$.

Diese soeben betrachteten Systeme entsprangen aus der Erweiterung der Gruppe der Wendepunkte in der Involution der Zahl $n$. Nehmen wir jetzt die Gruppe von $(3^\delta)^2$ Punkten, welche die Wendepunkte als einfachste Partialgruppe enthält, als Ausgangsgruppe, so geschieht diese Erweiterung von den acht Systemen zweiter Art aus, die wir schon betrachtet haben (Art. 22). Jedes solche System bestand aus $3^\delta$ Tangentenpolygonen von $3^\delta$ Seiten. Die Erweiterung jedes Punktes zu einer Gruppe von $n^2$ giebt ein Punktsystem zweiter Art von $n^2$ Punkten, wenn jetzt $n = 3^\delta p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots$ gesetzt wird; dasselbe enthält geschlossene Tangentenpolygone von

$$(p-1)(q-1)(r-1)\ldots 3^\delta.p^{\alpha-1}.q^{\beta-1}.r^{\gamma-1}\ldots \text{ Seiten,}$$

in der Anzahl

$$(p+1)(q+1)(r+1)\ldots 3^\delta.p^{\alpha-1}.q^{\beta-1}.r^{\gamma-1}.$$

Jeder Punkt des Systems ist Tangentialpunkt eines andern und seine Tangente enthält wieder einen Punkt desselben; durch jeden Punkt gehen $\frac{n^2-3}{2}$ Gerade nach Punktepaaren des Systems; ihre Anzahl ist im Ganzen $\frac{n^2(n^2-3)}{6}$. Diese acht Systeme bilden zusammen mit dem zur selben Zahl $n$ gehörenden System erster Art wieder ein solches erster Art für die Zahl $3n$.

44. Die Constructionen der Tafeln VIII und IX zeigen solche specielle Gruppen und geschlossene Tangentenpolygone. Wird in Taf. VIII der Punkt $M_3'$ auf dem Spurkreise $L_3$ so gewählt, dass er die Ecke 1 desjenigen Fünfseits 1 2 3 4 5 des Umrisskegelschnittes $U_5$ ist, welches eine Ecke 3 in der Spur $s^{P_4}$ besitzt, so ist damit im Raume das Centrum der Projection in die Ecke 1 desjenigen Fünfecks der $R_4$ verlegt, welches den Scheitel $S_1$ der $R_4$ als Ecke $N_3$ besitzt. Der Punkt $N_2$ erscheint demnach in der Projection als Wendepunkt; die vier übrigen Ecken $N_1^* N_3^* N_4^* N_5^*$ erzeigen sich als geschlossenes Tangentenpolygon von vier Seiten. Dem Fünfseit, das $U_5$ umschrieben ist, entspricht aber durch Projection aus der Ecke $M_3$ noch ein zweites Fünfeck $N_1' \dots N_5'$ des Ovals mit der Ecke $N_1'$ in $M_3'$, welches das Fünfeck der $N_i^*$ zu seinem Tangentialfünfeck hat.

Um die Configuration solcher Polygone klar zur Anschauung zu bringen, ist dieses Fünfeck mit seinen Verbindungslinien etwas hervorgehoben. Der $N_2$ entsprechende Punkt 2 auf $L_3$ bestimmt durch seine Tangenten an $U_3$ die beiden andern Ecken 2, welche sich als Wendepunkte projiciren. Bestimmt man von ihnen aus die beiden dem $U_5$ umschriebenen Fünfseite, so stellen sich diese mit dem ersten gleichzeitig als fünf dem Kegelschnitt $U_3$ umschriebene Dreiseite dar und ergeben die beiden andern Fünfecke $N_1 \dots N_5$ des unendlichen Astes, für welche der Wendepunkt $J_2$ resp. $J_3$ sich absondert, und welche sich demnach als die gleichbenannten Tangentenpolygone $N_1 N_3 N_4 N_5$ darstellen. Eines dieser beiden ist ebenfalls ersichtlich gemacht. Zwei Ecken desselben Fünfecks sind F.-Punkte für den Zehnschluss; zwei Ecken aus verschiedenen solcher F.-Punkte für den Dreissigschluss.

Die drei genannten sind von 54 auftretenden die einzig reellen Tangentenvierseite und haben die Eigenschaft, zu einander bezüglich der Wendepunkte perspectivisch zu liegen.

Die Figur der Taf. IX erzeigt zunächst die Construction der beiden reellen geschlossenen Tangentendreiseite, welche für die Wendepunkte perspectivisch liegen. Die Disposition zu ihrer Construction ist sehr einfach. Nimmt man ein beliebiges dem Kegelschnitt $U_3$ umschriebenes Dreieck 1 2 3 an, so bestimmt jede seiner Seiten einen Kegelschnitt im Umrisssystem des Flächenbüschels aus $M_3$, weil dieser die Kreistangente der Gegenecke zur Tangente hat. Die zweite durch diese gehende Tangente trifft den Spurkreis $L_3$ in einem Punkte $S$, welcher die Projection des vierten Schnittpunktes der Ebene (123) mit der $R_4$ aus dem Punkte $M_3$ ist. Ergänzt man den Punkt $S$ zum Dreieck, so hat jede der beiden andern Ecken, als Projection des Centrums aus $M_3$ d. h. als $M_3'$ aufgefasst, die Eigenschaft, das Dreieck (123) der $R_4$ als Tangentendreieck erscheinen zu lassen. Diese Punkte sind im Bilde der $C_3$ als $N_i^*$ bezeichnet; nur das eine reelle Dreiseit aus Tangenten derselben ist verzeichnet.

Ergänzt man jeden der Punkte 1, 2, 3 zum Fünfeck, wobei die fünf Ecken stets mit derselben Ziffer bezeichnet sein mögen, so bilden (Art. 43) die zwölf neu hinzugetretenen Punkte ein geschlossenes Polygon aus zwölf Tangenten seiner Ecken.

Diese zwölf Punkte bilden vier Dreiecke $N_1 N_2 N_3$ und die fünfzehn Punkte zusammen drei Fünfecke, von denen jedes das Tangentialfünfeck eines andern ist. Von den fünfzehn Ecken bilden drei das Tangentendreiseit, zwölf ein geschlossenes Tangentenpolygon; mit der Tangente $t_1$ im Punkte $N_1$ gelangt man zu $N_2$; mit $t_2$ in $N_2$ zu $N_3$, mit der Tangente $t_3$ in $N_3$ zu $N_1$; mit $t_4$ in $N_1$ zu $N_2$ u. s. f., so dass die Punkte $N_i$ aufeinander folgend die Reihe $N_1 N_2 N_3 N_1 N_2 N_3$ u. s. f. durchlaufen. Nur zwei der zwölf Tangenten $t_5$ und $t_6$ sind ausserhalb des Blattes gelegen; der Deutlichkeit halber ist der unendliche Ast der Curve nicht eingetragen.

45. Kehren wir zu unserer Entwicklung zurück, so bemerken wir, dass die drei verschiedenen Arten von Punktsystemen alle drei mit einander erscheinen, wenn man die In

volution der Zahl $3^{\delta}$ in derjenigen der Zahl $n$ erweitert, wo $n$ die Primfactoren 2 und 3 nicht enthalten soll, für den Fall, dass die Gruppe von $3^{2\delta}$ Punkten die neun Wendepunkte als Partialgruppe enthält. Das Punktsystem erster Art besteht dann aus neun Partialgruppen, nämlich aus den neun Systemen dritter Art mit einem Wendepunkt als der einen und den acht Systemen zweiter Art als den andern Partialgruppen; alle diese Systeme verdanken ihre Besonderheiten ihrer gemeinsamen Eigenschaft, mit ihrem Tangentialsystem identisch zu sein.

Es ist leicht zu übersehen, warum die Involution des $2.3^{\delta}$-Schlusses dabei eine besondere fundamentale Rolle spielt. Weil die neun Berührungspunkte der Schmiegungsebene aus dem Punkte $S$ der $R_4$ durch ihre Verbindungsgeraden und Tangenten eine Flächengruppe des Sechsschlusses bestimmen, so haben die acht übrigen Punkte $S_i$ die Eigenschaft, jene neun Punkte als Tangentendreiseite zu projiciren, d. h. als eine Punktegruppe, welche mit ihrer Tangentialgruppe identisch ist, ohne einen Wendepunkt enthalten zu müssen; und analog für die allgemeine Gruppe von $3^{2\delta}$ Punkten. Jede der andern Primzahlinvolutionen hat diese Eigenschaft nicht mehr; die Schmiegungsebenen in den Ecken eines $p$-Ecks führen zu einem zweiten $p$-Eck aus Punkten $S$; diese Punkte sind die einzigen, welche bei der Projection das $p$-Eck als Tangentenpolygon erscheinen lassen; dann aber erscheint eine Ecke desselben als Wendepunkt; analog für die Zahl $n$. Die Involution des $2.3^{\delta}$-Schlusses ist also die einzige, welche Tangentenpolygone von ungerader Seitenzahl liefert; alle andern enthalten in ihrer Seitenzahl so oft den Factor Zwei, als die Zahl $n$, aus der sie entstanden war, von Zwei und Drei verschiedene Primfactoren enthält.

Auch in diesen Fällen treten für die Erweiterung in der Involution des $2^{k}$-Schlusses keine neuen Tangentenpolygone hinzu, weil nach der Natur der ergänzenden Gruppen diese als von ihnen verschiedene Tangentialgruppen besitzen. Dagegen bleiben die Beziehungen bestehen, wonach wir die neuen Gruppen wieder als Systeme bezeichnen können.

Es treten zu den schon bekannten drei neue hinzu, welche wir kurz charakterisiren wollen (vergl. Art. 21).

Erweitert man zunächst in der Involution des Vierschlusses, so erhält man die drei neuen Gruppen, indem man jeden der Berührungspunkte $J$ der Tangenten aus einem Wendepunkte zu einer Gruppe von $n^2$ ergänzt; also sind je zwei Gruppen mit einer dritten perspectivisch. Betrachten wir diese Gruppen für $2n = m$ als eine einzige von $m^2$ Punkten, so haben wir neun Systeme mit je einem Wendepunkt; jeder Punkt des Systems hat die Eigenschaft, dass seine Tangente noch einen Systemspunkt enthält; aber nur $\frac{m^2}{4}$ Punkte unter diesen, den Wendepunkt ausgenommen, sind selbst Tangentialpunkte von Tangenten des Systems. Von diesen aus gehen $\frac{m^2-6}{2}$ Gerade, von $\frac{3m^2}{4}$ Punkten aus gehen $\frac{m^2-2}{2}$ Gerade nach Paaren von Systemspunkten; die Anzahl der Geraden mit drei Punkten ist $\frac{(m^2-1)(m^2-2)}{6}$.

Zieht man von allen diesen Punkten aus wieder die Tangenten an die $C_3$, so besteht zwischen den neuen Gruppen derselbe Zusammenhang, und so bei beliebig oftmaliger Wiederholung der Operation, so dass wir die Zahl $m$ oben durch $n.2^k$ ersetzen können.

Diese neun Systeme bilden zusammen ein System mit allen neun Wendepunkten ($m = 3n$, $n$ beliebig). $\frac{m^2}{4}$ Punkte, unter diesen die Wendepunkte, haben die Eigenschaft, dass ihre Tangente noch einen Punkt des Systems enthält, und dass sie Schnittpunkte von vier Tangenten sind. Durch jeden Wendepunkt gehen $\frac{m^2-4}{2}$ Gerade, durch $\frac{m^2}{4}-9$ Punkte gehen $\frac{m^2-6}{2}$ Gerade, endlich durch $\frac{3m^2}{4}$ Punkte je $\frac{m^2-2}{2}$ Gerade nach Punktepaaren des Systems; $\frac{m^4-3m^2+18}{6}$ Gerade enthalten drei Punkte.

Endlich bleibt die Erweiterung der Gruppen ohne Wendepunkt. Von $\frac{n^2}{4}$ Punkten gehen wieder $\frac{n^2-6}{2}$ und von $\frac{3n^2}{4}$ solchen gehen $\frac{n^2-2}{2}$ Gerade nach Paaren von Systemspunkten. $\frac{n^2(n^2-3)}{6}$ Gerade enthalten drei Systemspunkte.

Diese Beziehungen fassen sich in den Satz zusammen:

Nur die zu einer Zahl $n$ gehörenden F.-Punkte, welche mit einem Wendepunkt zur Zahl $3n$ gehören, haben die Eigenschaft, dass die Verbindungsgerade von zweien einen dritten enthalten kann; dieser kann aber auch ein zu einer kleineren Zahl $n$ gehörender Punkt sein.

46. Zu den geschlossenen Tangentenpolygonen im Bilde der $R_4$ giebt es im Raume selbst ein Analogon in den geschlossenen Secantensystemen, die durch fortgesetzte Construction der Schmiegungsebene entstehen. Sie treten bei jeder Gruppe von Flächen $V^{(2n)}$ auf. Hat nämlich die Gruppe von $n^2$ Punkten $F$ mit der Gruppe $S$ ihrer Schmiegungsebenen einen Punkt gemein, so sind beide Gruppen identisch.

Wählt man also als Ausgangspunkt einen Punkt mit stationärer Schmiegungsebene, so sondert sich dieser Punkt ab, und von den übrigen hat jeder die Eigenschaft, dass er Schnittpunkt einer Schmiegungsebene in einem andern Punkte ist und seine Schmiegungsebene selbst einen solchen enthält. Wählt man den Ausgangspunkt als Centrum einer Centralprojection, so projicirt sich dieser als Wendepunkt und den geschlossenen Tangentenpolygonen der Projection entsprechen geschlossene Secantensysteme der genannten Art, so dass wir die Zahl derselben nur mit 16 zu multipliciren hätten.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass von den Zahlen $p$, $q$, $r$ ... keine gleich 3 sein darf, und ferner zeigt es sich, dass dem Siebeneck nach Absonderung des Wendepunktes nicht ein Sechsseit, sondern zwei Dreiseite, ebenso dem 13-Eck zwei Sechsseite entsprechen, und dass allgemein jedes $p$-Eck, wo $p$ von der Form $(6k + 1)$ ist, Secantenpolygone von der Seitenzahl $3k$ giebt.

Ausser dieser giebt es aber noch eine zweite Art, eine Gruppe von $n^2$ Punkten $F$ mit der Gruppe $S$ identisch zu machen. Die sechs B.-Quadrupel der Flächen $V^{(4)}$ ordnen sich in 24 Paare, von denen jeder Punkt die Schmiegungsebene des andern enthält. Diese Construction giebt durch Ergänzung zweier solcher Punkte zu Gruppen von $n^2$ die sämmtlichen Polygone der schon erhaltenen Art wieder, aber mit doppelter Seitenzahl. Die Ecken aller so erhaltenen Secanten-

systeme sind die achtpunktigen Gruppen von Berührungspunkten der Tangenten auf den Flächen $V^{(2n)}$.

47. Bis jetzt haben wir die Steiner'schen Polygone stets nur auf zwei Flächen des Büschels ausgeführt; man kann jedoch zu ihrer Ausführung auch mehr Flächen der Gruppe verwenden, z. B. alle Hyperboloide derselben mit nur zwei Erzeugenden des Polygons auf jedem. Der äusserste Fall wird derjenige sein, wo im Bilde mit den $n$ Ecken auch $n$ F.-Punkte auftreten, somit durch jeden eine einzige Seite geht, im Gegensatz zu dem Falle, wo alle $2n$ Seiten auf einer einzigen Fläche liegen. Ueber solche Steiner'sche Polygone im weitern Sinne und ihre Punktegruppen gilt folgender Satz[1]):

Ist die Zahl $n$ der F.-Punkte der Curve $C_3$ ungerade, so kommt es im Allgemeinen viermal, und ist sie gerade, so kommt es kein Mal oder unendlich viele Mal vor, dass das Polygon sich schliesst.

Wir bestätigen diese Wahrheit durch räumliche Construction. Denken wir uns ein beliebiges der $R_4$ eingeschriebenes $n$-Seit, so sind dadurch $n$ willkürliche Flächen des Büschels fixirt und jedem Punkt $A_1$ als Anfangspunkt entspricht bei Festhaltung der Reihenfolge der Flächen ein bestimmter Endpunkt $A_{n+1}$ des Polygons. Die Geraden $A_1 A_{n+1}$ werden im Allgemeinen eine Regelfläche erfüllen, welche mit jeder Fläche $F$ des Büschels eine Anzahl von Linien gemein haben kann. Um diese zu bestimmen, legen wir durch $A_1$ eine Ebene nach einer beliebigen Erzeugenden $e$ von $F$, so entspricht dieser die Ebene von $e$ nach $A_{n+1}$, und weil jede dieser Ebenen die $R_4$ in zwei Punkten $A_1 B_1$ und $A_{n+1} B_{n+1}$ resp. trifft, besteht nach dieser Festsetzung unter den Ebenen des Büschels an $e$ ein zwei-zweideutiges Entsprechen und es wird daher im Allgemeinen viermal eintreten, dass zwei entsprechende Ebenen sich decken. In einem solchen Falle fällt dann $A_{n+1}$ entweder nach $A_1$ oder $B_1$, d. h. die Fläche $F$ und die Regelfläche haben keine, oder sie haben vier Erzeugende mit einander gemein.

Es ist leicht, durch successives Zufügen von Flächen zur

1) Vergl. V. Eberhard an der gen. Stelle p. 75 ff.

Gruppe von $n$ solchen zu gelangen und die beiden Fälle auseinander zu halten. Soll das Polygon nur eine Seite haben, so hat das Hyperboloid $F$ entweder keine oder alle Seiten, d. h. jede Lage mit ihm gemein. Soll das Polygon zwei Seiten haben, so kann der Endpunkt $A_3$ nie mit $A_1$ zusammenfallen; die vier zusammenfallenden Lagen der Ebenen bezeichnen also die vier Erzeugenden $e_1$ von $F$, welche jene zwei Seiten zu einem Dreiseit ergänzen; aber die beiden ersten Flächen und die Fläche $F$ sind drei willkürliche Flächen, und es kommt somit bei drei Flächen viermal vor, dass das Polygon sich schliesst; dass die zwölf Ecken derselben drei Quadrupel bilden, ist evident.

Gehen wir also jetzt von drei Flächen aus, so bedeuten die vier zusammenfallenden Lagen der entsprechenden Ebenen die ebengenannten Polygone, d. h. jetzt fällt $A_4$ mit $A_1$ zusammen, es wird folglich keine Lage des Polygons geben, wo dasselbe sich mit einer Erzeugenden $e_1$ schliessen würde, ausser wenn das Hyperboloid $F$ die Tangente in einem Punkte $A$ eines Dreiseits enthält; dann aber haben wir vier Flächen in der Gruppe, und weil den Ebenen nach den Tangenten von $F$ die Doppelebenen in der Zuordnung entsprechen, so tritt jetzt für alle Lagen des Polygons Schluss ein.

Nehmen wir jetzt vier beliebige Flächen, so wird das Polygon auf diesen sich im Allgemeinen nie schliessen, $A_5$ fällt daher viermal mit $B_1$ zusammen und wir haben auf den fünf Flächen vier geschlossene Polygone u. s. f. Es fällt also abwechselnd $A_{n+1}$ mit $A_1$ und $B_1$ zusammen und darin liegt die Begründung des ausgesprochenen Satzes.

Bei einer ungeraden Anzahl von Flächen fällt $A_{n+1}$ auf $B_1$; setzt man jetzt das Polygon noch einmal um ebensoviel Seiten fort, so fällt $A_{n+1}$ mit $A_1$ zusammen, d. h.: Wenn die Zahl der Flächen ungerade ist, so schliesst sich das Polygon, wenn auf jeder Fläche zwei Seiten gezogen werden. Zieht man also auf $n$ ganz willkürlichen Flächen einen Linienzug, und verbindet man zwei solche Ecken des Polygons, welche eine ungerade Zahl von Seiten zwischen sich haben, so hat man ein geschlossenes Polygon von gerader Seitenzahl und dasselbe schliesst sich daher stets für

alle Lagen des Ausgangspunktes mit einer Erzeugenden desselben Hyperboloids.

Man sieht, dass durch die Verbindungslinien der Ecken neue Flächen hinzutreten, welche mit den alten sich ebenfalls zu Gruppen mit geschlossenen Polygonen zusammenfügen. Die interessanten Besonderheiten der Gruppen von involutorischem Charakter sind dann eben die, dass die durch jene Verbindungsgeraden bestimmten Flächen mit den Ausgangsflächen identisch werden; die betrachteten Gruppen von F.-Punkten und die geschlossenen Tangentenpolygone sind daher von besonderer Art.

Diese Sätze für die ebene Curve dritter Ordnung ausgesprochen bilden den Ausgangspunkt in der genannten Arbeit von Herrn Küpper; wir brauchen also hier nicht weiter darauf einzugehen, sondern beschränken uns darauf, die für den allgemeinen Fall der zweitheiligen Raumcurve $R_4$ abgeleiteten Resultate für die Degenerationsformen und die allgemeine Lage des Centrums zu modificiren.

## XII. Specialformen und allgemeine Lage des Centrums.

48. Haben wir eine Raumcurve $R_4$ mit vier nicht reellen doppeltprojicirenden Kegeln, so bleiben alle Realitätsverhältnisse für ihr Bild unverändert; die aus jeder Kegelfläche entspringende Gruppe der Flächen $V^{(2n)}$ ist jedoch nie reell, sobald die Zahl $n$ von der Form einer Potenz von 2 verschieden ist; denn die Tangentialgruppe jedes $n$-Ecks liegt auf dem unendlichen Ast und gestattet daher keine reellen Verbindungslinien ihrer Punktepaare durch den Punkt $S_t^{c_1}$; diese Curve $R_4$ ist daher nicht als Erzeugniss projectivischer Involutionen ungerader Ordnung auf dem Hyperboloid erhaltbar.

Ebenso bleiben die Realitätsverhältnisse für alle Involutionen ungerader Ordnung bestehen im Falle der eintheiligen Curve und erfahren bloss die Abänderungen, wie sie an der Involutionsreihe für $n = 2^k$ beschrieben wurden, durch das Hinzutreten dieser Involutionen. Da zwei Kegelflächen nicht reell sind, können aus ihnen keine reellen Flächen $V^{(2n)}$ hervorgehen; die Anzahl der reellen für alle Involutionen ungerader Ordnung reducirt sich somit auf die Hälfte.

Hat die Curve $R_4$ einen Doppelpunkt, so lässt die Modification in dem Verfahren zur Bestimmung der sich selbst entsprechenden Flächen erkennen, dass die allgemeine Involution von der Ordnung $n$ ist; besitzt die $R_4$ einen isolirten Doppelpunkt, so bleiben jeweilen die reellen Elemente des allgemeinen Falles; hat sie dagegen einen eigentlichen Knoten, so ist von jeder Gruppe nur ein Punkt reell. Die Anzahlen $n_v$ und $n_f$ der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(2n)}$ und der mit einem beliebigen Punkte zu einem Paar von F.-Punkten combinirbaren ergeben sich für $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ aus den Formeln des allgemeinen Falles, wenn an Stelle von $p^2$, $q^2$, $r^2$ jedesmal $p$, $q$, $r$ resp. gesetzt wird, in Uebereinstimmung mit den betrachteten besonderen Fällen. Die Besonderheiten der Clebsch-schen Punktsysteme und die Anzahl der geschlossenen Tangentenpolygone von ungeänderter Seitenzahl sind leicht entsprechend zu bestimmen.

Ebenso ist $n$ die Ordnung der Involution des $2n$-Schlusses für die beiden Degenerationsformen der $R_4$ mit zwei Doppelpunkten. Im Falle der Raumcurve $R_3$ dritter Ordnung mit Bisekante treten keine sich selbst entsprechenden eigentlichen Flächen $V^{(2n)}$ auf; diese werden vertreten durch das Paar von reellen oder nicht reellen Kegelflächen durch die Curve; dagegen treten im Falle des Zerfallens der $R_4$ in zwei Kegelschnitte eigentliche Flächen $V^{(2n)}$ in der Anzahl

$$n_v = 2(p-1)(q-1)(r-1)\ldots p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1}\ldots$$

auf, gleich der Anzahl der Tangenten aus $S_i^c$ an alle Kegelschnitte, welche von den Seiten sämmtlicher $n$-Ecke auf dem Bilde des Kegelschnittes $K$ umhüllt werden. Diese sind wieder in doppelter Berührung unter sich und mit $K'$ für das Paar von Schnittpunkten auf $p'$; jene Punktegruppen bestimmen also wieder eine Anzahl specieller Projectivitäten auf dem Kegelschnitt $K'$ als Möbius'sche Involutionen $n$. Ordnung; sie haben mit den auf $p'$ liegenden das genannte Paar von Schnittpunkten als das einzige Paar ihrer vereinigten Doppelelemente gemein.

49. Mit der allgemeinen Lage des Centrums im Raume erhalten wir wieder die Erzeugung der Curve vierter Ordnung

mit zwei Doppelpunkten aus projectivischen Tangenteninvolutionen $n$. Ordnung auf Paaren von Kegelschnitten des vierfach berührenden Umrisssystems. Von den $n^2$ Kegelschnitten jeder Gruppe sind im Allgemeinen $n$ reell; ihre projectivischen Tangenteninvolutionen erzeugen mit $n_f$ anderen der Gruppen einen Kegelschnitt und $\frac{n-3}{2}$ Curven vierter Ordnung vom Geschlecht Eins, wenn die Ordnung der Involutionen ungerade, und $\frac{n-2}{2}$ Curven vierter Ordnung, wenn sie gerade ist; jede dieser Curven $C_4$ hat die Eigenschaft, dass auf ihr Gruppen von $n^2$ Punkten liegen, die sich paarweise zu geschlossenen Polygonen von $n$ Seiten verbinden lassen, welche zugleich $n^2$ Kegelschnitten einer Gruppe in Paaren umschrieben sind. Insbesondere existiren $n_v$ Kegelschnitte des Systems, die als Träger zweier projectivischer Tangenteninvolutionen $n$. Ordnung die Curve $C_4$ als Theil des Erzeugnisses ergeben, so dass ihnen unendlich viele Polygone von $n$ Seiten umschrieben, und der $C_4$ eingeschrieben sind. Mit dem Eintreten der projicirenden Fläche unter die Gruppe von $n^2$ geht einer der Kegelschnitte über in ein Punktepaar und seine Tangenteninvolution in eine Strahleninvolution $n$. Ordnung an einen Doppelpunkt der betrachteten $C_4$. Auch der andere Doppelpunkt ist Träger einer solchen Involution, sobald das Centrum auf einer sich selbst entsprechenden Fläche $V^{(2n)}$ liegt; wir haben eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und mit unendlich vielen ihr eingeschriebenen geschlossenen $n$-Seiten, deren Seiten abwechselnd durch ihre Doppelpunkte gehen.

Wir verlassen hier den allgemeinen Fall mit einer reichen Fülle von Modificationen, die aus der speciellen Lage des Centrums gegenüber dem Flächenbüschel entspringen, und welche alle Fälle des Formenwandels der Curven vierter Ordnung vom Geschlecht Eins umfassen (D. G. II. p. 180) und erläutern diese Verhältnisse noch an Hand der Construction von Tafel X oder der Erzeugung der Curve $C_4$ aus zwei projectivischen Tangenteninvolutionen dritter Ordnung; in dem besondern Falle nämlich des gleichseitigen Hyperboloids, als sich selbst entsprechender Fläche $V^{(6)}$, und der

Regelschaarinvolutionen dritter Ordnung desselben aus Tripeln rectangulärer Erzeugenden.

Seien also $S$ und $Q'$ die congruenten Spur- und Fluchtkegelschnitte (in ähnlicher Lage) eines Hyperboloids bei centraler Darstellung, so wird dasselbe ein gleichseitiges, wenn das Centrum so bestimmt wird, dass dem Kegelschnitt $Q'$ unendlich viele Dreiecke einbeschrieben sind, welche alle denselben Höhenpunkt als Hauptpunkt $C_1$ der Darstellung und die mittlere Proportionale aus den Abschnitten auf der Höhe eines solchen zum Radius des Distanzkreises $D$ haben. Sind dann $D_1 D_2$ die beiden Durchstosspunkte der projicirenden Erzeugenden der Fläche, so ist diese durch die gemachten Festsetzungen vollständig bestimmt und besitzt insbesondere die eine Hauptaxe normal zur Bildebene, wenn der Hauptpunkt $C_1$ als Mittelpunkt des Fluchtkegelschnittes festgesetzt wird. Durch seine Verbindungsgeraden mit $D_1$, $D_2$ führt dann jedes Tripel von Punkten $Q_i'$ des Fluchtkegelschnittes zu drei Punkten $S_i$ der Spur und damit zu drei Paaren paralleler Erzeugenden der beiden Schaaren, welche sich in sechs Punkten $A_i A_i'$ der Raumcurve $R_4$ begegnen, welche ausser dem unendlich fernen Querschnitt der Fläche noch erzeugt wird.

Solche sechs Erzeugende sind jedesmal sechs Kanten eines rectangulären Parallelepipeds der Fläche und die projectivische Zuordnung der Involutionen wird somit durch den Fluchtkegelschnitt selbst vollzogen; seine Schnittpunkte mit der $R_4$ sind daher die vier Doppelpunkte des Gesammterzeugnisses; als solche somit die Schnittpunkte der vier Doppelelemente der Involutionen mit der unendlich fernen Ebene. Das Tripel projicirender Ebenen nach den Seiten eines Dreiecks aus Punkten $Q_i'$ ist jedesmal ein Tripel des Polarsystems, welches den Kegel nach dem Kugelkreis definirt und es lässt sich in diesem Falle leicht nachweisen, dass die besprochenen Doppelpunkte durch diesen Kegel ausgeschnitten werden. Die Curve $R_4$ ist also selbst circular und liegt somit auf einer Kugel.

Die drei Punkte $A_i$ und ebenso die $A_i'$ liegen je auf einem Oval des Curvenbildes $C_4$ und ihre Verbindungslinien müssen sich als Diagonalen eines Parallelepipeds im Bilde $M_2'$ des Mittelpunktes der Fläche treffen. Dieser ist zugleich die Spitze

des einen doppeltprojicirenden Kegels der $R_4$, dessen Spur $L_2$ sich leicht durch Bestimmung der Durchstosspunkte seiner Erzeugenden nach bekannten Punkten der $C_4$ bestimmen lässt. (In der Figur der Taf. X wurde zuerst der Spurkreis der Kugel durch seinen Radius bestimmt.) Die drei andern Kegelspitzenbilder sind in Folge der disponirten Lage des Hyperboloids gegenüber der Bildebene der Mittelpunkt $M_1'$ des Fluchtkegelschnittes und die Richtungen seiner Axen; wir haben somit das Quadrupel der $M_i$ vollständig beisammen: Fluchtpunkt $Q_{12}'$ und Durchstosspunkt $S_{12}$ der Axe $M_1 M_2$ in den resp. Mittelpunkten von $Q'$ und $S$. Mit Hülfe dieser Kegel bestimmt man jetzt die Tangenten der Curve in den construirten Punkten, sowie die Doppeltangenten $t_i$ durch die Punkte $M_i'$, von den vier reell und drei eingetragen sind.

Während nun das eine Hyperboloid in der Gruppe der Flächen $V^{(6)}$ die $C_4$ als Erzeugniss projectivischer Strahleninvolutionen, also mit unendlich vielen eingeschriebenen Sechsseiten ergiebt, erzeugen die drei andern Hyperboloide $V^{(6)}$ die $C_4$ aus projectivischen Tangenteninvolutionen ihrer Umrisskegelschnitte als Theil, mit dem Bilde eines Restkegelschnittes in einer Quadrupelebene. Diese Flächen $V^{(6)}$ lassen sich mit Hülfe der Punkte $M_i'$ sehr einfach bestimmen. Projicirt man nämlich die Punkte $A_i$ und $A_i'$ von Neuem aus $M_i'$ auf die Curve, so setzen sich diese zwölf Punkte jetzt zu zwei geschlossenen Tangentenpolygonen aus je sechs Tangenten des Umrisskegelschnittes $U$ zusammen.

Zu dieser neuen Punktegruppe gelangt man aber auf directem Wege, wenn man von dem Tripel der $Q_i^{*\prime}$ ausgeht, welches für $M_1'$ oder $C_1$ zu dem der $Q_i'$ symmetrisch liegt. Es resultirt daraus für jedes Oval ein Dreieck von Punkten $A_i^*$ und $A_i^{*\prime}$ resp., so dass nach der Bezeichnung der Figur $A_1'A_2'A_3'$ perspectivisch mit $A_3^*A_1^*A_2^*$ und $A_1A_2A_3$ mit $A_2^{*\prime}A_3^{*\prime}A_1^{*\prime}$ bezüglich $M_1'$. Die Ecken der beiden zusammengehörenden Dreiecke bestimmen je ein Sechsseit aus Tangenten des Umrisskegelschnittes der zur Ecke $M_1$ gehörenden Fläche $V^{(6)}$. Nebst dem eingezeichneten giebt es noch zwei weitere reelle Umrisskegelschnitte $U$ mit reellen und vier weitere reelle solche mit nicht reellen Tangenteninvolutionen; ferner acht

nicht reelle Umrisskegelschnitte $U$ mit nicht reellen Involutionen ihrer Tangenten.

Die stereographische Projection der Curve $R_4$ aus einem Punkte der Kugel ergiebt die Erzeugung der bicircularen Curve $C_4$ auf analogem Wege zugleich mit ihrem Verhalten zu speciellen Kreissystemen, d. h. zu Systemen von Kegelschnitten durch ihre Doppelpunkte, welche als Bild des Schnittsystems mit der Kugel auftreten, auf welche hier aber nicht näher eingetreten werden soll.

50. Die von Steiner am Schlusse seiner ersten Mittheilung gegebene Bemerkung, dass die geradlinigen Seiten der Polygone durch Kegelschnitte ersetzt werden können, lässt sich ebenfalls räumlich leicht bestätigen. Verbindet man drei beliebige Punkte der Raumcurve $R_4$ mit dem Centrum, so schneiden sämmtliche durch sie gehende projicirende Kegel zweiter Ordnung die $R_4$ in drei variablen Punkten einer stets durch denselben festen Schnittpunkt $D$ der $R_4$ gehenden Ebene. Legt man ferner nach zwei beliebigen Punkten $F_1$ und $F_2$ der $R_4$ die projicirenden Strahlen, so bestimmen diese mit den drei ersten zwei Büschel von Kegelflächen; jede derselben begegnet der $R_4$ in noch zwei variablen Punkten und nach der obigen Beziehung schneiden die Verbindungslinien derselben alle die Geraden $DF_1$ und $DF_2$ resp. Sind nun $F_1$ und $F_2$ selbst F.-Punkte für den $2n$-Schluss, so bestimmen auch die Geraden $DF_1$ und $DF_2$ zwei Flächen einer Gruppe von $n^2$ solchen. Fasst man also auf diesen zwei Flächen mittelst der Regelschaaren, welche $DF_1$ und $DF_2$ resp. schneiden, ein geschlossenes Polygon ins Auge, so gehen die Ebenen aus $D$ nach seinen Seiten abwechselnd durch die Punkte $F_1$ und $F_2$; jede dieser Ebenen bestimmt aber eine Kegelfläche durch die drei willkürlichen projicirenden Strahlen und einen der Strahlen nach $F_1$ und $F_2$, welche die Ecken des Steiner'schen Polygons paarweise enthalten. Damit erhält auch diese Eigenschaft der Polygone ihre Begründung.